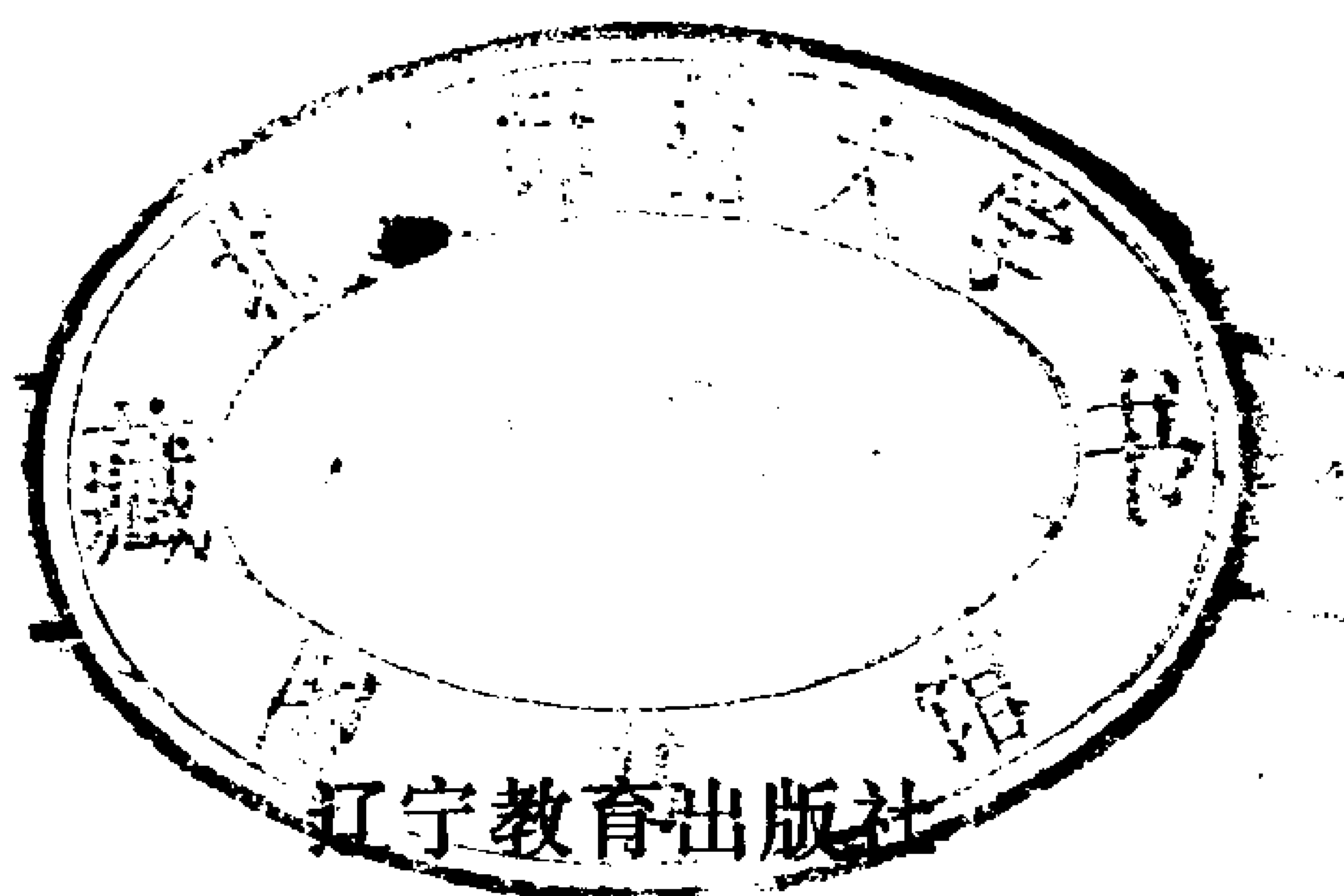
世界数学名题欣赏丛书

欧几里得第五公设

蒋　声　著

7111 1232/07



辽宁教育出版社

1988年·沈阳

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

欧几里得第五公设

蒋 声 著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号） 沈阳新华印刷厂印刷

字数：89,000 开本：787×1092 1/32 印张：5 3/4 插页：4
印数：1—1,000
1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

责任编辑：俞晓群 责任校对：王淑芬
封面设计：安今生 插 图：潘智倩

ISBN 7-5382-0310-9/G·257
定价：1.55 元

内 容 简 介

本书是"世界数学名题欣赏丛书"之一。欧几里得第五公设从何而来？为什么它是了解古典几何学平行理论的关键？怎样通过尝试证明第五公设而发现许多新的几何？这样的发现对现代数学和物理学有什么重要影响？许多杰出的数学思想又是怎样与研究第五公设的漫长岁月紧密联系在一起的？……所有这些有趣的问题，都将在本书中得到回答。一个陌生而美丽的几何世界将展示在你的眼前。

Summary

This book is one of "A Series of Appreciation of the Famous Mathematical Topics in World". Where does Euclid's fifth postulate come from? Why it is the key statement to understand of the parallel theory of classical geometry? How do the attempts to prove the postulate lead to the discovery of many new geometries? How important are the effects of the discovery for modern mathematics and physics? And, how many great mathematical thoughts are close relating with the very long process of research for it? ...... All these interesting questio ns will been answered in this book. A strange and beautiful geometric world will be showed to you

前　言

欧几里得是公元前三世纪希腊的一位数学家。欧几里得第五公设是欧几里得在他的名著《几何原本》中叙述的一个关键性的命题，列为五条公设中的最后一条。曾经有很多人认为这个命题或许没有资格作为公设，试图把它证明出来。研究了两千多年，虽然未能达到预期目的，却有了许多更加重要的意外收获。结果发现，除了欧几里得的那一套几何学而外，还有许许多多各种各样的几何学，因而对今天的数学和物理学产生了深刻的影响。有关欧几里得第五公设的故事，已成为数学史上的一段佳话。

欧几里得第五公设从何而来？有何作用？究竟能否把它从公设行列中拿掉？为什么通过对它的研究可以发现新的几何？这种发现对现代数学

和物理学有何影响？通过欧几里得第五公设问题的研究过程，可以反映出哪些重要数学思想？它们是怎样演变的？这一连串问题，构成了本书所要探讨的基本内容。探讨的重点，在于阐述数学思想，因而将尽可能绕过定义和定理的庞大体系，注重思路，略去细节。

欧几里得第五公设问题涉及多方面专门知识，要能用适当的词句，确切地把握住隐藏在庞大理论体系后面的思想实质，颇费周折。作者的水平和能力都很有限，拿起笔来，常常感到力不从心。所幸已有许多前辈做了大量出色工作，提供了丰富的资料和宝贵的经验，才使本书得以脱稿。恳切希望各有关方面的专家们和爱好者们对本书内容给予批评指正。

蒋　声

1987年7月

目 录

前言……………………………………………………1
一、几何学的起源………………………………………1
二、《几何原本》和第五公设…………………………11
三、试证第五公设………………………………………31
四、发现非欧几何………………………………………41
五、曲面上的非欧几何…………………………………59
六、空间概念的发展……………………………………79
七、公理方法…………………………………………123
八、时空的四维几何学………………………………147
参考文献………………………………………………170
人名译名对照表………………………………………174

Contents

Preface 1

I The origins of geometry 1

II «Elements» and the fifth postulate 11

III Attempts to prove the fifth postulate 31

IV The discovery of non-Euclidean geometry 41

V Non-Euclidean geometries on surfaces 59

VI Development of the concept of space 79

VII The axiomatic method 123

VIII Four-dimensional geometries of spacetime 147

Bibliography 170

A List of Names 174

一 几何学的起源



问渠那得清如许？
为有源头活水来。
（宋）朱熹：《观书有感》

几何学是从制造器皿、测量容器、丈量土地等实际问题中产生和发展起来的.

早在几十万年以前，当原始人类为了采集食物而用石块制作简单的武器和工具时，就已开始出现形的观念. 这些石器往往被做成较为规则的几何形状，反映出当时人们的头脑中已初步确立了一些几何图形的形象. 例如，在北京西南周口店的猿人遗址中，发现了五十万年前制作的石器，其中的石刀、石斧等的每一个面都近似于平面，尖状器的尖角近似于锥体. 在山西省襄汾县丁村发现了几万年前原始人用石块制成的球形工

具。原始人类还知道如何美化生活，创造了石像和绘画等艺术形式。在法国和西班牙发现了大约一万五千年前的地穴里的绘画。原始艺术的出现，反映出人们已能把简单图形组合成复杂形状，来表达某种内容，获得美的享受。

大约在一万年以前，覆盖在欧、亚大陆上的冰块开始融化，地面露出大片的森林和沙漠。以捕鱼和打猎为生的流动人群，大部分定居务农，开始了新石器时代。出现了陶器、木器和纺织品，发明了轮子。产品的几何形状更加准确和精致，并且常用各种几何图案加以装饰。产品的形状和装饰图案倾向于对称，很多陶器做成旋转体的形状，在装饰图案中出现平行线、相交线、垂直线，甚至还有球面上的大圆，以及全等形和相似形。

生产的进一步发展，使人们不仅关心物体的形状，而且对大小有更具体的要求，这就需要测量长度和容积，丈量土地，并且进行有关的计算，于是就出现了一些可直接应用于计算的几何公式和定理。但是在这些公式和定理开始出现时，往往不是象我们现在这样作为重要内容单独列出来，而多半是隐含在一些具体计算问题的解答过程中，靠我们去仔细揣摩。

古代埃及人把数学资料用墨水写在很薄的草片上，现在英国博物馆和苏联的莫斯科分别收藏了一批这样的草片，都是公元前1700年左右埃及人写成的，上面记载着一些数学问题和它们的解答。通过分析解答过程，可以推断出当时是依据什么法则进行计算的。例如，纸片上记载着一个求棱台体积的问题，大意为："若有人告诉你说：有一棱台，高为 6，底为 4，顶为 2。你就要取这 4 的平方，得结果为16。你要把它加倍，得结果 8。你要取 2 的平方，得 4。你要把16、8 和 4 加起来，得28。你要取 6 的三分之一，得 2。你要取28的两倍，得56。你看，它等于56。你可以知道它是对的。"这段文字叙述，如果改用现在的数学符号，可以简洁地表达成

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2),$$

其中 V 是四棱台的体积，棱台的两个底面是边长为a和b的正方形，棱台的高为h.在本题中 $h=6$, $a=4$, $b=2$。这是一个完全正确的公式。现在的中学生在高中一年级下学期才学习棱台体积的计算，这时早已学完平面几何，立体几何的学习也已接近尾声。但是在历史上，棱台体积计算却成为最早见于文字记载的几何内容之一。

另一方面，古代埃及人进行几何计算的法则也并不完全正确．例如，他们在一个庙宇的墙上刻着一个捐献给庙宇的田地表，这些田地一般有四条边．铭文中计算四边形田地面积的方法，用现在的符号可以写成

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2},$$

其中S是四边形的面积，a和b是四边形的一双对边，c和d是另一双对边，对于边长为a、b、c的三角形田地，他们认为$d=0$，因而

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}.$$

这些法则即使看成近似公式，误差往往也很大．

古代巴比伦人把他们的数学资料刻成泥版的形式．现在保存的泥版中，较早的一些是公元前2000年左右的，大部分是公元前600年到公元300年间制成的．这些泥版主要研究算术和代数，只在解决实际问题时搞一点几何．他们收集了一些计算简单平面图形面积和简单立体体积的法则，知道了三角形的相似，以及相似三角形的对应边成比例的性质．在一块制作于公元前2000年左右的泥版上，刻着一个特别的数表，根据专家考证，表中列出了十五组勾股弦数，即满足a^2+

$b^2=c^2$的自然数组a、b、c。据此，有人认为，可能巴比伦人已经知道了勾股定理，甚至还可能知道了求勾股弦数的一般公式。当然这只是一种推测。巴比伦人在几何问题中的图形画得并不精致，计算法则也未必正确。他们为着解决某些物理问题而计算的体积，有些算对了，有些算得不对。

无论从古代埃及的草片或是巴比伦的泥版，都找不到有关推理论证的记载。所采用的计算几何量的法则，都是通过数字计算的具体例题表现出来的。有些问题虽然涉及的道理比较复杂，所用的公式却完全正确；另一些问题虽然涉及的道理相对地简单一些，所用的计算法则却未必正确。有些法则在某种情形下是较好的近似，而在另一些情形下产生较大的误差。把这些现象联系在一起，自然会得出一个结论：在古代的埃及和巴比伦，人们都是从社会实践过程中逐步归纳、总结出一些计算法则，用来解决当时遇到的实际计算问题，边试算、边改进。如果一个法则试算的结果与实际情形相符，便认为有充分理由继续加以采用。

在古代的中国，从现存的一些较早的数学书籍来看，几何知识的积累，也是来源于社会实践

九乙

的推动。天文观测、兴修水利、丈量田亩等，都促进了几何学的发展。在《周髀算经》、《九章算术》等书中，往往也是通过具体数字计算问题反映出当时人们所掌握的几何知识；后代人注释这些书时，才补出有关定理的证明。但是中国古代的数学有着自己的特点。在约于公元前二世纪成书的《周髀算经》中，在进行具体数字计算的同时，还明确地叙述出在直角三角形中求斜边长的一般方法："勾、股各自乘，并而开方除之"。用现在的符号写出来，就是

$$c=\sqrt{a^2+b^2},$$

其中a和b是两条直角边的长度，c是斜边长。生活在公元前四、五世纪的墨子，在他的著作《墨经》中，甚至试图对一些几何概念给出逻辑的定义。其中，关于两线段相等、线段的中点、圆周等概念的定义，既清晰，又确切。例如，关于圆周的定义是这样的：

"圜，一中同长也。"

"圜"就是圆周。上面这句话，翻译成现代语言，意思就是：圆周是到一个中心点有相等距离的点所构成的图形。

《墨经》中还叙述了一个重要命题："穷，或有前不容尺也"，意思是：用一条线段去量另

一条线段，总有量到不够继续往前量的时候。这里的“尺”，是《墨经》中对线段概念采用的术语。两千多年以后，德国数学家希尔伯特提出的一套几何学公理系统中，有一条阿基米德公理，与《墨经》中的上述命题实质上完全相同。

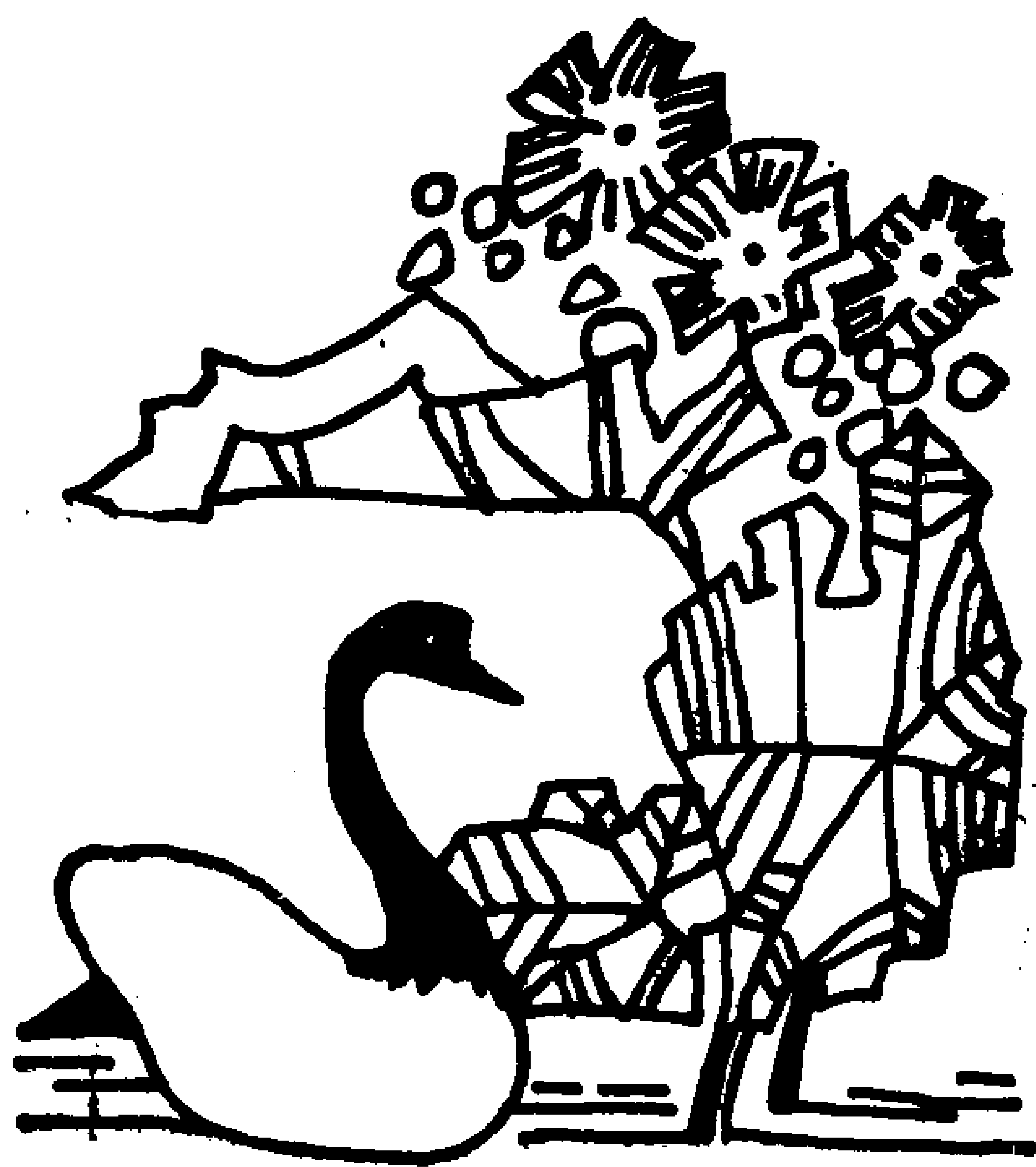
《墨经》和《周髀算经》中的这些一般性叙述，表明我国至少在公元前五世纪以后，就已开始对几何学中的某些关于共性的问题产生兴趣，不再局限于对具体几何计算问题的逐个讨论。造成这种转变的原因，可能是由于我国在春秋战国时代社会剧烈变动，诸子百家各树一帜，各个学派为了发展自己的学说，纷纷对从社会实践中观察、了解到的大量现象进行深入的思考、分析，研究事物的内在的客观规律，从感性认识上升为理性认识。

对几何学进行全面而深刻的研究，使之发展成为一门独立的理论学科，这一历史性的转变，是在古代希腊完成的。特别是欧几里得编著的《几何原本》，是几何学史上的一个里程碑。自从《几何原本》问世以来，两千多年间，已发行一千多种版本。很多国家的中学平面几何和立体几何课本，至今仍是按照《几何原本》定下的基

调编写的。

也正是由于《几何原本》的问世，才带来一个使无数人困惑和兴奋的著名问题——欧儿里得第五公设问题。

二《几何原本》和第五公设



行冲薄薄轻轻雾，
看放重重迭迭山。
（宋）范成大：《早发竹下》

关于欧几里得的生平，人们知道得很少，只有



图 2—1 欧几里得

一个情况是相当肯定的：在公元前300年左右，欧几里得生活在亚历山大里亚城，并在那里讲学。还知道欧几里得可能是在柏拉图的学院里接受教育。

关于《几何原本》，也有一些不清楚的地方。战争毁灭了古代希腊的大图书馆，使大量珍贵数学资料化为灰烬。欧几里得本人写的手稿也荡然无存。幸亏《几何原本》早已流传出去，所以后来在公元四世纪时，亚历山大里亚城的泰奥恩能够出版他对《几何原本》的修订本。泰奥恩还通过讲课来传播《几何原本》。泰奥恩的修订本和讲稿辗转流传下来，成为后来研究《几何原本》内容的一项重要依据。结合从其他渠道流传下来的手稿译本、评注和各种有关资料，互相参照，互相印证，才使现在的人们能够了解《几何原本》的全貌。经过这许多曲折，免不了会有些存疑的地方。很难完全搞清楚何时、何地、何人作了哪些改动，也不清楚欧几里得编写《几何原本》的目的，有人认为这是写给数学家看的学术著作，另一些人则认为是给学生编写的课本。

在《几何原本》的各种现有版本中，一般感到数学史家希思的版本最值得信赖。在数学史家海伯格和希思对欧几里得著作深入研究的基础

上，希思把《几何原本》全文（13卷）翻译成英文，并且添上长长的引言和评注，合订成三册。有些版本的《几何原本》有15卷，增加的两卷是后人写的。

《几何原本》的中文译本，分两次出完，跨越两个朝代，历时二百多年。前六卷在1607年出版，由明代的徐光启（1562～1633）和意大利人利玛窦(1529～1610）合译；后九卷在1858年出版，由清代的李善兰(1811～1882)和英国传教士伟烈亚力(1815～1887)合译。中文译名中的“原本”二字，当然不是指原来的版本，而是指“原理”，相当于英文版本的书名《Elments》。至于“原本”前面的“几何”二字，则是徐光启在翻译时加上去的。由于在中译本问世以后，又出现了更好的希思版本，所以我们以下的讨论将以希思的英文版本为依据。

在《几何原本》的第一卷中，首先列举了23个定义，接着规定5条公设和5条公理，最后论述48个命题。著名的欧几里得第五公设，就是这五条公设中的最后一条。5条公设的全文如下。

公设

1. 从任一点到任一点可作直线。

2. 可将有限直线不断地沿直线延长。

3. 可取任一中心和距离作圆。

4. 所有直角彼此相等。

5. 若两条直线被一直线截得的一组同侧内角之和小于二直角，则若适当延长这两条直线，必在和小于二直角的一侧相交。

把这五条公设互相比较，立刻就会发现，前面四条公设都非常简单明白，只有第五条公设比较复杂，要交待得很细致，才能把条件和结论完全说清楚。

是不是欧几里得本来就觉得公设和公理应该有简有繁，把简单的放在前面，复杂的放在后面，体现由简到繁的原则呢？后面的五条公理是不是比公设 5 还要复杂呢？为了解答这个疑问，我们接下去看看《几何原本》中的五条公理。

公理

1. 等于同量的量彼此相等。

2. 等量加等量，总量仍相等。

3. 等量减等量，余量仍相等。

4. 彼此重合的量相等。

5. 整体大于部分。

这五条公理都与前四条公设一样的简单到极点，只有公设 5 显得那样碍眼。平心而论，公设 5 的命题也不能算十分复杂。但是把它与那另外

九个简单透顶的命题放在一起，就显得极不相称。

五条公理对形和数都适用，五条公设是专门讨论形的。有关形的简单浅显命题俯拾即是，为什么欧几里得偏偏看中这样一条第五公设呢？

为了揣摩欧几里得的意图，我们不妨接着再往下看一段《几何原本》的文字。

命题1 在已知有限直线上作一个等边三角形。

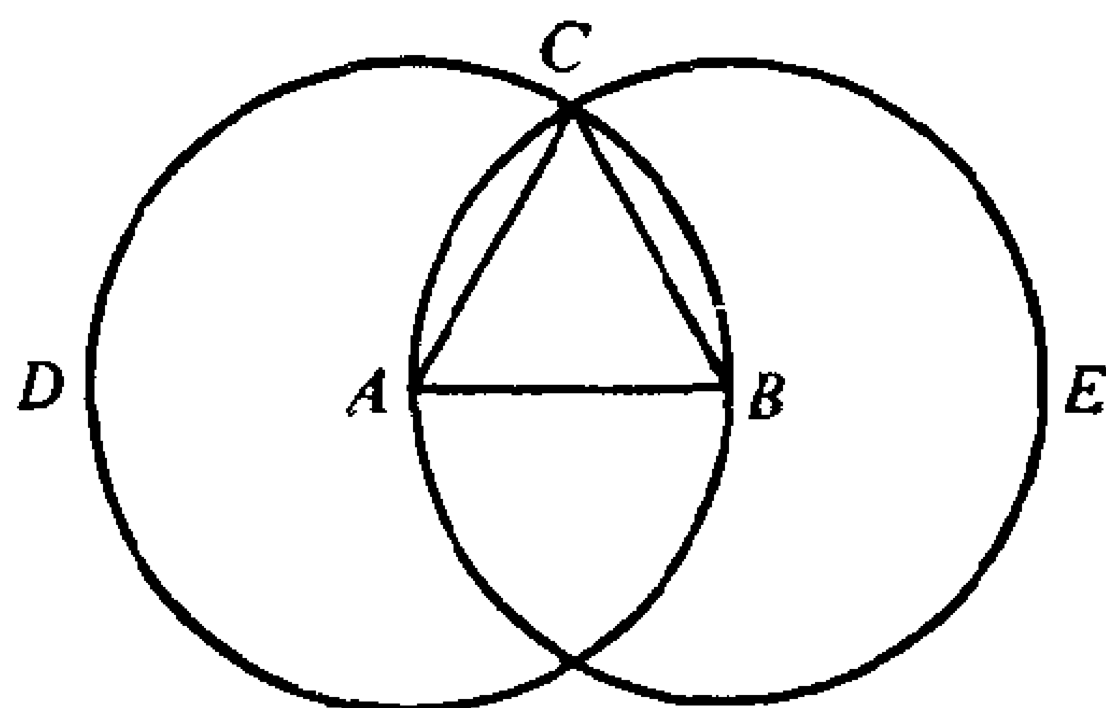


图 2—2

设AB是已知的有限直线。

求作一个在直线AB上的等边三角形。

取中心A和距离AB作圆BCD； 〔公设 3〕

再取中心B和距离BA作圆ACE；〔公设 3〕

从两圆的交点C到点A、B连结直线CA、CB。 〔公设 1〕

现在，因为点A是圆CDB的中心，所以AC等于AB。〔定义15〕

又因为点B是圆CAE的中心，所以BC等于BA。〔定义15〕

但是又已经证明了CA等于AB，所以直线CA、CB都等于AB。

而等于同量的量也彼此相等；〔公理1〕

所以CA也等于CB。

所以三条直线CA、AB、BC彼此相等。

所以三角形ABC是等边三角形；并且它是作在已知直线AB上的。

这正是所要作的。

容易看出，命题1是一个作图题，它的解答过程可以明显地划分出已知、求作、作法、证明四个步骤。在叙述作法和证明过程时，每一步都力求举出所引用的逻辑依据。这里引用的依据有公设3、公设1、公理1，还有定义15（圆的定义）。如果现在的一位初中二年级学生能把几何作业写得这样层次分明，数学老师便可以感到相当满意了。当然也有让数学老师皱眉头的地方，那就是在所有应该说“线段”的场合，这里都没有说“线段”，而是一会儿说“直线”，一会儿说“有限直线”。但是对于《几何原本》来说，

这样叙述，在逻辑上是无可非议的。在《几何原本》第一卷的23个定义中，并没有术语“线段”而只定义了“直线”，并且“直线”的定义也与我们现在不同。它的前面四个定义是这样的：

定义

1. 点是没有部分的那种东西。
2. 线是没有宽度的长度。
3. 一条线的两端是点。
4. 直线是同它自己上面各点看齐的线。

定义 4 使我们想起用眼睛沿一直线向前看的实际情形，甚至想起体育老师的口令：“向前看齐！”也许当初这个定义就是这样从实际生活中仔细观察思考以后提炼出来的。值得注意的是，从定义 4 看出，《几何原本》里的“直线”首先要是一条“线”；而从定义 3 又看出，《几何原本》里的一条”线”是有两个端点的，所以《几何原本》中的“直线”，就是现在几何课本里的线段，它的长度总是有限的。在需要考虑尽量伸展的情形时，就用“延长”来弥补。在需要特别强调长度有限的时候，就说“有限直线”。

在23个定义中，也没有定义圆的半径，而只定义了圆、圆的中心和直径，所以在谈到作圆时，才采用“取中心A和距离AB作圆BCD”之类的说法。

总之，在研究命题1的时候，只引用在书中出现在它前面的知识，包括定义、公设和公理。一旦命题1解决以后，它就成为一个基本作图题，可供研究在它后面的命题时引用。事实上，在研究命题2时，除去引用公设和公理而外，就已引用了命题1的作图；而在研究命题3时，又引用了公设、公理、定义和命题2。如此继续，以后的各个命题中，有些是基本作图题，有些是定理，研究每个命题时，都只引用它前面的内容。

23个定义中，有些定义只是描述性的，例如“点是没有部分的那种东西”，这样的定义对论证没有什么帮助，因而在研究命题时用不着引用它们。但是五条公设和五条公理在研究命题时都被引用了。对各条公设或公理最先被哪一个命题引用进行统计，结果得到下页一个有趣的表格。

从这个统计表看出，公设1、2、3和公理1、3、4很早就被引用；公设4和公理2、5引用得比较迟；公设5引用得特别迟。

如此看来，公设5就更加值得怀疑。是否欧几里得不太喜欢这条公设，非到万不得已时，不肯用它？或者，是否前面28个命题都太简单，无需第五公设出马？

	最早引用的命题
公设1	命题1
2	2
3	1
4	14
5	29
公理1	命题1
2	13
3	2
4	4
5	16

命题1的内容，上面已经全文介绍，倒是确实非常简单，现在浏览一下命题2～28，看看它们的难易程度。

命题2和3都是简单的基本作图题，命题4是关于由两边夹一角对应相等判断两个三角形全等的定理。命题5主要讲等腰三角形的两个底角相等。命题6断言，三角形中，等角对等边。命题7实际上是命题8的预备定理。命题8是由三边对应相等判定两个三角形全等的定理。命题9是基本作图题，作角的平分线。命题10是等分线段的基本作图题。命题11从直线上一点作它的垂线。命题12从直线外一点作它的垂线。命题13断言邻补角之和为二直角。命题14断言，若两角之

和为二直角，有一公共边及公共顶点，且另外的边位于公共边异侧，则它们互为反向延长线。命题15断言对顶角相等。命题16断言三角形的外角大于不相邻的内角。命题17断言，三角形的任意两个内角之和小于二直角。命题18断言，三角形中，大边对大角。命题19断言，三角形中，大角对大边。命题20断言三角形两边之和大于第三边。命题21的大意是：如果两个三角形有公共底边，并且前一个三角形的第三个顶点在后一个三角形的内部，则前者的周长较小，顶角较大。命题22研究已知三边长度作三角形。命题23是作一个角等于已知角。命题24断言，若两个三角形有两边对应相等，但夹角不等，则夹角大者对边也大。命题25是命题24的逆定理。命题26是由两角带一边对应相等判定两个三角形全等的定理。命题27是由内错角相等判定两直线平行的定理。命题28是由同位角相等或同侧内角互补判定二直线平行的定理。

以上28个命题中，包含很多重要的定理和基本作图题，其中不少命题的证明过程都比命题29的证明复杂。由此可见，前面28个命题不用公设5的原因，并不是这些命题太简单，而是由于欧几里得尽量把不用公设5的命题往前排。直到第

29个命题，已经非用第五公设不可，才无可奈何地让它露面。

命题29究竟是怎样的呢？为什么它的证明过程一定要引用欧几里得第五公设呢？

看来有必要仔细研究一下《几何原本》中命题29及其证明过程的全文，现在把它抄录如下。

命题29　一直线截平行直线所得的内错角相等，同位角相等，同侧内角之和等于二直角。

设直线EF截平行直线AB、CD；

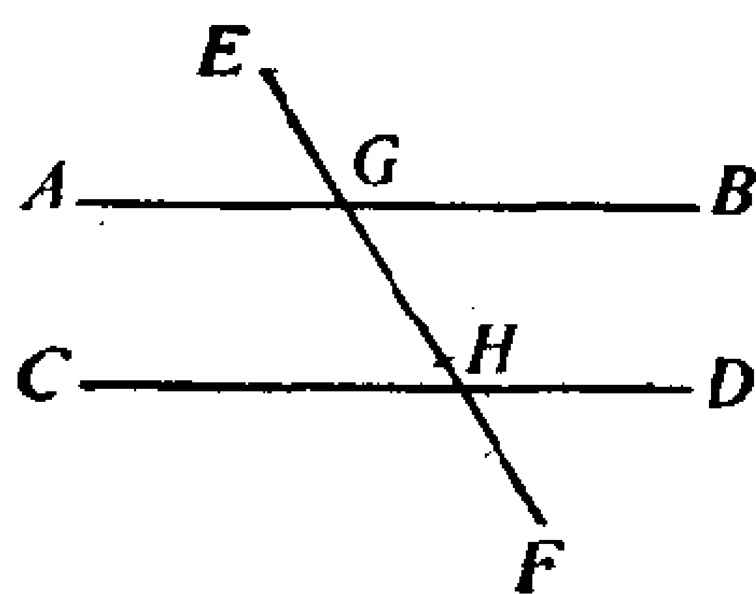


图 2—3

我说：截得的内错角AGH、GHD相等；角EGB等于它的同位角GHD；同侧内角BGH、GHD的和等于二直角。

因为，如果角AGH不等于角GHD，其中必有一个较大。

设角AGH较大。

把两个角都加上角BGH；

那么角 AGH、BGH 之和大于角 BGH、GHD之和。

但是角AGH与BGH之和等于二直角；

（命题13）

所以角BGH与GHD之和小于二直角。

但是同侧内角之和小于二直角的两直线适当延长必定相交；

（公设 5）

所以如果适当延长 AB、CD，就会相交；但是它们不相交，因为根据假设，它们是平行的。

所以角AGH并非不等于角GHD，因而与它相等。

又因为角AGH等于角EGB；（命题15）

所以角EGB也等于角GHD。（公理 1）

把这两个角都加上角BGH，

所以角EGB与 BGH 之和等于角 BGH 与 GHD之和。（公理 2）

但是角EGB与BGH之和等于二直角；

（命题13）

所以角BGH与GHD之和也等于二直角。

证完

命题29是熟知的平行线性质定理。有了平行线的性质定理，连同命题27、28中的平行线判定

定理一起，就能进一步证明许许多多的新定理，解决各种各样的作图题。公设 5 在《几何原本》中引用得很少；第一次引用，就是证明这样一个关键性的重要定理。哪怕仅仅为了这一次应用就专门提出这条第五公设，也是值得的。

根据数学史家的考证，《几何原本》中的大部分内容，在欧几里得以前都已经知道；但是这一条第五公设却是欧几里得自己提出的。

欧几里得提出第五公设的目的，是否正是为了证明平行线性质定理？

要解开这个疑团，需要对命题29的证明作更仔细的分析。为此，又需要了解，《几何原本》中的“平行线”的概念，是否与我们现在所理解的相同。

查一查《几何原本》第一卷中的23个定义，发现平行线的定义名列最后，定义全文如下：

23. 平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，并且不管怎样往两个方向延长，彼此在每个方向上都不相交。

这个定义，从字面上看起来，似乎与我们现在的平行线定义差不多，实际上却有微妙的区别。因为我们已经知道，《几何原本》中的所谓“直线”，都是有限长的，相当于我们现在的线

段．所以，《几何原本》中的“平行直线”，实际上是位于平行直线上的线段，都是有限长的．因此《几何原本》中定义“平行直线”时，不能象我们现在这样定义成“同一平面内没有公共点的直线”，而必须通过延长后的情况来定义．而在说到延长时，用词又很谨慎：不是说“无限延长”(produced infinitely)，而是说“不管怎样延长”(produced indefinitely)．既然把“直线”都看成是有限长的，所以延长以后仍是有限长的．同一平面内的两条“直线”，不管往两边延长到怎样的有限长度，在每一边都不相交，自然永远也不会有交点了．这是典型的“从有限看无限”的思想方法．想要说无限长，却不肯把“无限”两个字说出来，而是说：不管你指定怎样一个有限长度d，它都比d长．在《几何原本》中，总是尽量回避“无限”．不但线是有限长的，面也是有限大小的．人们所能确实了解的，毕竟是有限大小范围内的事物；说到“无限”，便包含一种想象的成份．有限情形容易控制，无限情形却难以驾驭．但是很多问题又迫使人们不得不同“无限”打交道，于是就产生了“从有限看无限”的巧妙想法．

研究两条平行直线的性质，不管用什么方法

避免说到“无限”的字样，实质上总是要考虑两直线无限延长而永不相交这一本质属性。而对两条相交直线，情况就要好得多，因为不管它们相交于多么远的地方，毕竟交点是在有限大小的范围里面。于是，在“从有限看无限”的原则下面，自然而然地产生了“从相交看平行”的研究方法。

命题29的证明过程表明，欧几里得第五公设正是“从相交看平行”的产物。

为什么这样说呢？我们记得，命题29是研究平行线的性质的。这个命题可以分成三个较小的命题：

(a)若两直线平行，则内错角相等；

(b)若两直线平行，则同位角相等；

(c)若两直线平行，则同侧内角互补。

证明了命题(a)(b)(c)中的任何一个，立刻就能推出另外两个。《几何原本》从命题(a)着手。已知两直线平行，从这个条件能推出些什么来呢？根据平行线的定义，这个条件意味着不管怎样把这两条直线向两边延长，都不可能相交。“不管怎样”？这可不好控制。这平行的条件真有点麻烦，假如不是研究平行，而是研究相交，也许顺手一些，用反证法！只要证明下面的命

题：

(*a*)′若内错角不等，则两直线相交。

命题(*a*)′只涉及相交直线，似乎容易控制一些。当内错角不等的时候，两直线怎样相交呢？肯定是相交在同侧内角之和小于二直角的那一边。假定内错角不等，立刻就能推出必有一组同侧内角之和小于二直角。

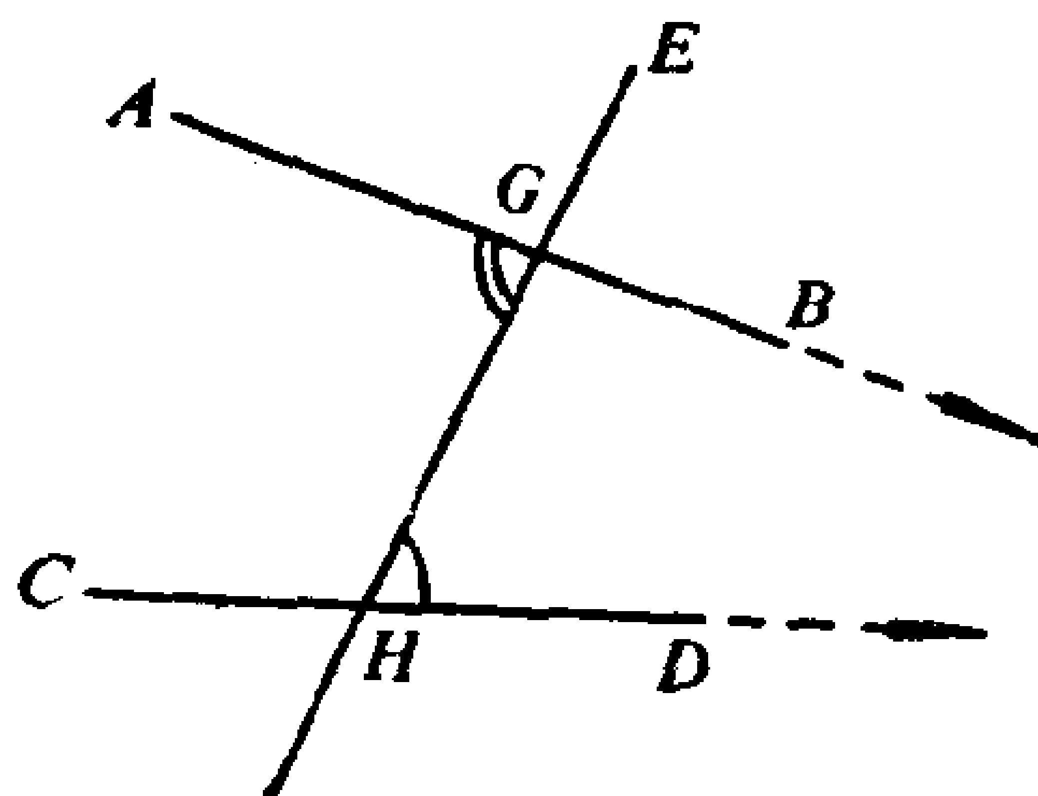


图 2—4

可是，当有一组同侧内角之和小于二直角时，是否两直线一定相交呢？看来这是对的，即使原来画出的直线长度不够相交，适当延长以后，也一定会在小于二直角的一侧相交。不过，要寻找这个事实的逻辑根据，还真不大容易。今天想，明天想，后天也想，实在想不出。算了，看来这个事实一定不可能从前面的命题、定义、公理和其他公设推出来。应该承认这个事实，把它列为一条公设。前面已经有了四条公设，这一

条应该名列第五。于是就有了第五公设。

不知道两千多年以前的欧几里得是否这样想过，不过这样的思路确实是十分顺畅自然的。为了把全部几何知识编织成一根逻辑的链条，为了回避无限，从有限看无限、从相交看平行，在证明平行线性质定理的时候，很多人都会不约而同地想起欧几里得第五公设。

反证法的实质，就是证明待证命题的逆否命题：若原结论不对，则原条件将会不对。《几何原本》中证明命题29，是从内错角着手，考虑命题(a)的逆否命题 (a)′。其实，如果是先有公设5，后证命题29，更自然的想法是从同侧内角着眼，考虑命题(c)的逆否命题：

(c)′若同侧内角之和不等于二直角，则两直线相交。

从同侧内角之和不等于二直角，可知必有一组同侧内角之和小于二直角，因而由公设5得出两直线相交。

实际上，欧几里得第五公设基本上就是逆否命题(c)′，不过把结论搞得更精确些，指出在哪一侧相交而已。

越是对欧几里得第五公设进行深究，越发引起人们的怀疑：到底欧几里得第五公设能不能证

明？是否应该把它从公设中清除出去？

很多人确信，不用花费很多力气，就能证明欧几里得第五公设。

于是开始了试证第五公设的漫长历程。

三 试证第五公设



怪得鸟声如许好，
此身还在乱山中。
（宋）欧阳鈇：《绝句》

公设和公理，在意义上虽有微妙的差异，但是总的看来，两者都是不加逻辑论证即予承认的论断，都应该是极其浅显明白的，其正确性可从人类长期实践的经验得到保证。所以，后来往往对它们不加区别，统称为公理。《几何原本》中的五条公设和五条公理，总起来就是十条公理。试图证明第五公设，就是想要把它从公理表中抹掉，从公理降为一条普通的定理。

公元五世纪时的评论家普罗克鲁（410～485）曾经十分明确地说过："这个公理完全应从全部公理中剔除出去，因为它是一个包含许多

困难的定理”。

很多人对欧几里得第五公设提出过各种各样的“证明”。非常遗憾，在这种场合总是使用带有引号的“证明”，因为所有这些“证明”都是经不住推敲的，虽然论证的结果是导出了欧几里得的第五公设，但是在论证过程中却往往不知不觉地引进了新的假设。所以，这种“证明”并不减少公理的总数，只不过是用新的公理来代替欧几里得的第五公设而已。

例如，普罗克鲁就曾经提出一个这样的“证明”，大致如下。

首先注意，平行线的判定定理在《几何原本》中列为命题27和28，在证明它们时，没有引用公设5。所以，在试证公设5的时候，可以引用平行线的判定定理。

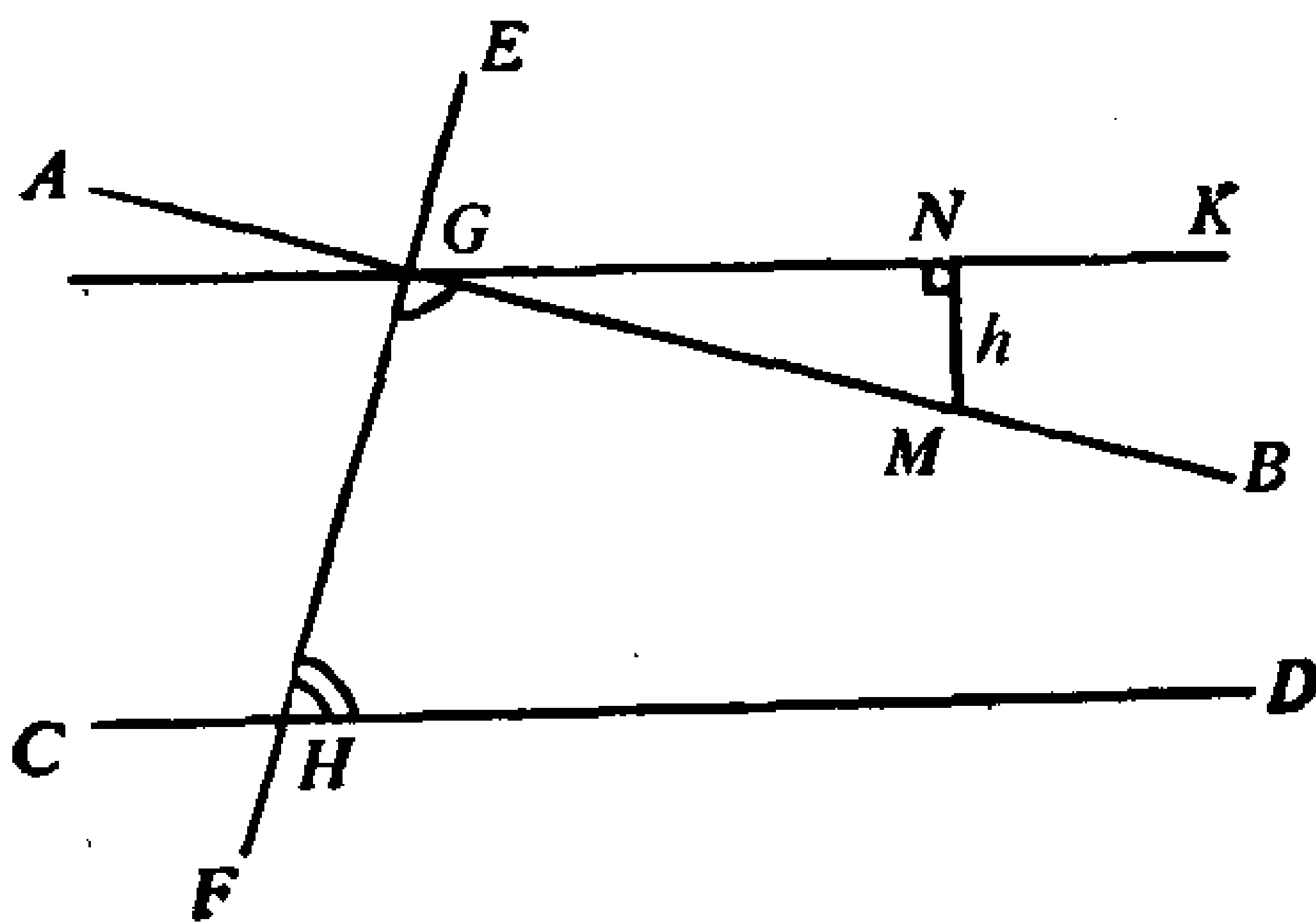


图 3—1

如图3—1，设两直线AB和CD被直线EF所截，所得同侧内角BGH与DHG之和小于二直角，想要证明直线AB和CD相交(交点与B、D位于直线EF同侧)．

为此，过G点作

$$\angle FGK=\angle GHC,$$

并使K与D位于EF同侧，那么根据平行线的判定定理，将有$GK\parallel CD$．用d表示直角，那么

$$\angle HGK+\angle GHD=2d,$$

$$\angle HGB+\angle GHD<2d,$$

$$\therefore\quad \angle HGB<\angle HGK.$$

因此直线GK和AB不重合，并且射线GB位于$\angle HGK$的内部，在射线GB上取点M，设M到直线GK的距离$MN=h$，那么当M沿射线趋近G点时，h趋于0；而当M沿GB方向无限远离G点时，h将无限增大．所以在M点移动的过程中，必有一个时刻，使得h等于两直线GK、CD间的距离，因而这时M将落在直线CD上．而M移动过程中始终保持在射线GB上，所以动点M这时的位置就是射线GB与HD的交点．这样就证明了，两直线AB、CD必相交，且交点在同侧内角之和小于二直角的一侧，证完。

普罗克鲁的这个“证明”，从推理过程来看，倒是顺畅得很，没有什么自相矛盾的地方。但是普罗克鲁的目的是要把第五公设从《几何原本》的公理表中剔除出去，因此证明中能够作为依据的，只有《几何原本》中的五条公理和前面四条公设，以及由它们推出的命题1～28。按照这个要求，重新检查普罗克鲁的“证明”，结果发现，所引用的论据中，有两个超出允许范围，它们是：

(A)当动点沿着角的一边无限远离顶点时，动点到角的另一边的距离无限增大；

(B)两平行直线间的距离是有限的。

通过更仔细的考虑，可以发现，断语(A)可利用公设1～4和公理1～5导出，断语(B)则不能。所以，普罗克鲁的“证明”，实际上是引进一个新的假设(B)去代替原来的欧几里得第五公设。这丝毫也不能说明可以把欧几里得第五公设从《几何原本》的公理表中剔除掉。

但是也不能说这种“证明”劳而无功，还是有一些收获，最主要的是搞清楚了，命题(B)是与欧几里得第五公设等价的。这里所谓等价，意思是说：它们两个可以在《几何原本》的公理表中互相替换。如果在公理1～5和公设1～4的

基础上，加进公设5，就能按通常方法证明命题(B)；而如果在公理1～5和公设1～4的基础上，加进命题(B)，就能按照普罗克鲁的思路证明公设5。

就这样，普罗克鲁的“证明”虽然没有达到删除欧几里得第五公设的目的，却得到一个副产品：如果采用“两平行直线间的距离是有限的”作为公理，就可代替欧几里得第五公设。

还可以举出很多类似的“证明”，都犯了同样的毛病：在论据中引入了新的假定。自然，也常常得到同样性质的副产品：证明了可以采用某个新的公理来代替欧几里得第五公设。

在各种与欧几里得第五公设等价的公理中，流传最广的一个，是现在各国中学课本里常用的平行公理：

在平面上，过直线外一点只能作一条直线与它平行。

这条公理是普雷菲尔（1748～1819）在1795年提出的，通常叫做普雷菲尔公理。不过，在普雷菲尔之前，就有人提出了这个公理的等价形式。1769年，芬恩提出了下面的公理：

两条相交直线不能同时平行于第三条直线。

但是芬恩也不是最早提出这条公理的人，普

罗克鲁早就把它写进了对《几何原本》第一卷命题31的注释里面，并且正是采用的与芬恩相同的叙述方式。

法国数学家勒让德（1752～1833）翻译的欧几里得《几何原本》，先后发行12版，每一版都有附录，认为已经给出了第五公设的证明，但是每次都有缺点，总是暗中假定了一些不该假定的东西。勒让德发现了一个很重要的事实：利用除第五公设而外的其余九条欧几里得的公理（包括公设），可以证明，若一个三角形的内角和为二直角，则每个三角形的内角和都等于二直角；若一个三角形的内角和小于二直角，则每个三角形的内角和都小于二直角。此外，利用这九条公理可以推出，每个三角形的内角和不能大于二直角。

这样一来，只要假定三角形的内角和为二直角，就能推出欧几里得第五公设。

但是，勒让德没有能够从公设1～4和公理1～5推出三角形内角之和不小于两直角，因而不能推出欧几里得第五公设。

英国数学家瓦雷斯（1616～1703）在“证明”欧几里得第五公设时，引进了这样一个假设：“对于任意一个三角形，存在一个与它相似

的三角形，且相似比等于任意给定的值。”意大利数学家萨开里（1667～1733）指出，不必假定这么多，只要假定“存在两个不全等但各角对应相等的三角形”就够了。但是不管假定得怎么少，总是引进了一个与欧几里得第五公设等价的假定。

法国数学家克来洛（1713～1765）引进的假定是：“若四边形有三个角是直角，则第四个角也是直角。”

类似的工作还可以举出很多。

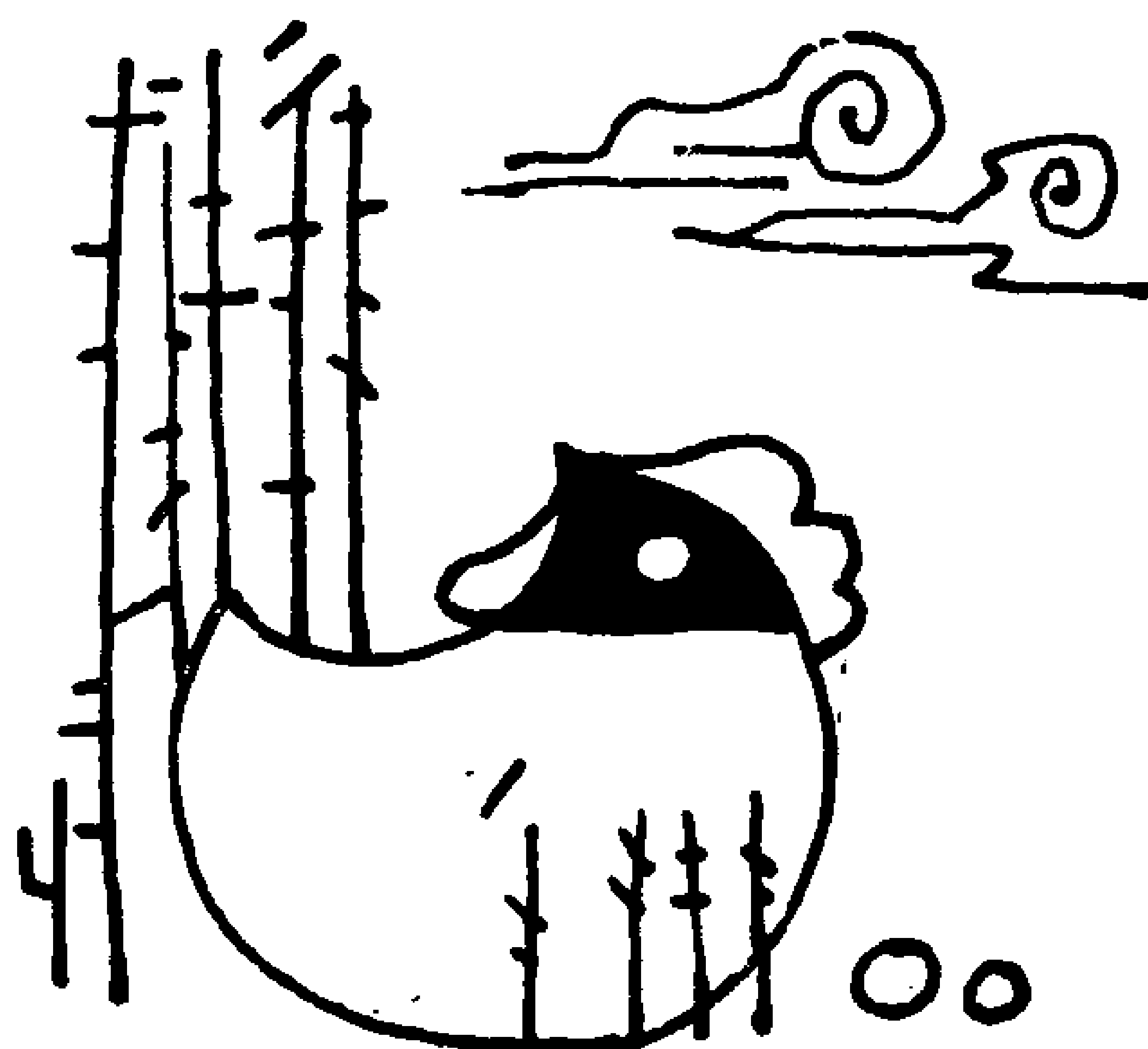
从欧几里得时代开始，就有人试图证明他的第五公设。满以为这件事非常简单，不过是举手之劳，却谁料历时两千年仍未解决。在这两千年间，整个数学的面貌已经焕然一新，继解析几何和微积分诞生以后，新的数学分支纷纷脱颖而出。很多数学家创立了复杂艰深的数学理论，无数困难问题得到解决。但是人们在这个看上去极其简单的欧几里得第五公设问题面前，却仍然一筹莫展，大数学家们也不能例外。这件事说起来真叫人惭愧，法国数学家达朗贝尔(1717～1783)在1759年说，欧几里得第五公设问题是“几何原理中的家丑”。

当然不能功亏一篑，总结前人经验，改进研

究思路，深入钻研下去，光明就在前头。

转机终于到来。非欧几何的发现，使研究欧几里得第五公设的人们惊诧不已。

四 发现非欧几何



千淘万漉虽辛苦，
吹尽狂沙始到金。
（唐）刘禹锡：《浪淘沙》

在我们做一道数学题的时候，如果直接证明屡攻不克，就会想到试一试反证法的效果如何。

在我们试图证明某个猜想的时候，如果使尽各种招数仍无进展，就会想到查一查这个猜想本身有没有毛病。

历史上，试证第五公设的人们也曾有过这两种体验，并且正是这些朴素的想法把欧几里得第五公设的研究终于引上了正确的轨道。

意大利的教授和教士萨开里很有耐心地用反证法试证第五公设。现在问题的条件是《几何原本》中的公设1～4和公理1～5，想要证明公

设5．为此，可假定公设5或其等价命题不对，希望能由此推出矛盾来。

做这件事确实需要有极大的耐心．因为，沿着这条思路推证下去，可以一个接着一个地导出无数新奇古怪的结论，却找不到自相矛盾的地方。

萨开里考虑这样的四边形$ABCD$：它的$\angle A$和$\angle B$是直角，并且$AD=BC$．容易证明，这时必有$\angle C=\angle D$．关于$\angle C$和$\angle D$的大小，从逻辑上看，共有三种假设可供选择：

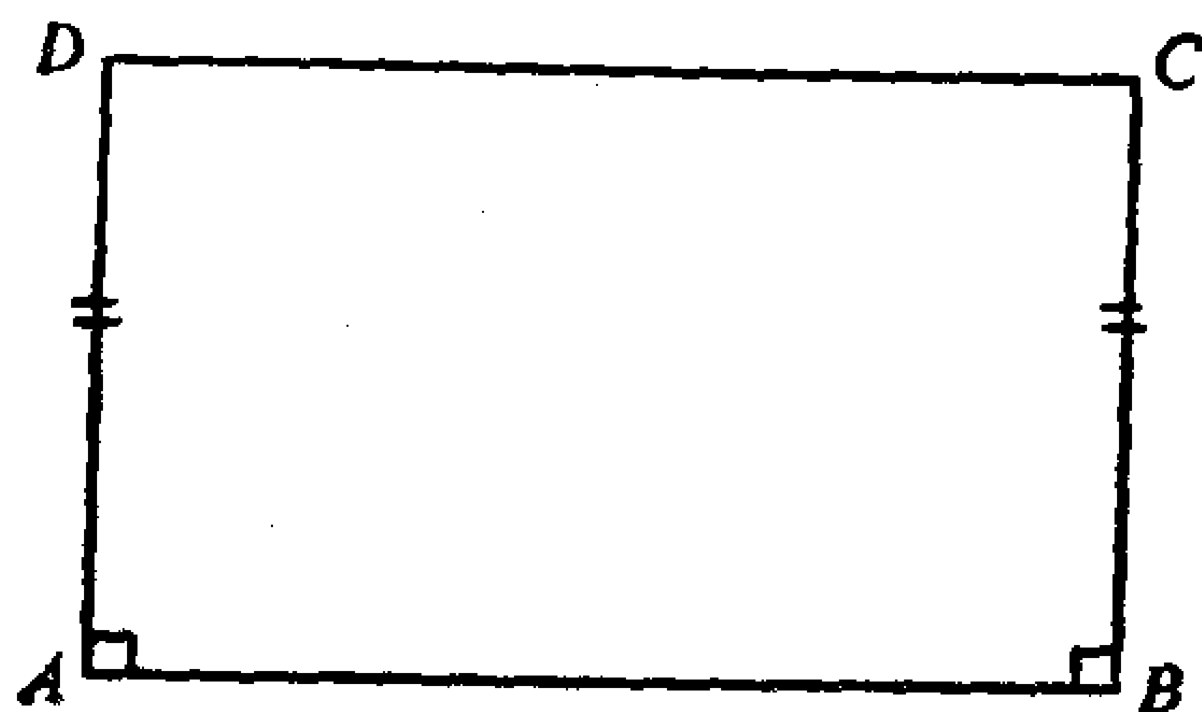


图 4—1 萨开里四边形

1．$\angle C$和$\angle D$是直角（直角假设）；

2．$\angle C$和$\angle D$是钝角（钝角假设）；

3．$\angle C$和$\angle D$是锐角（锐角假设）。

其中的直角假设与欧几里得第五公设等价．萨开里假定直角假设不成立，希望能由此推出矛盾。

萨开里很快否定了钝角假设。但是转向锐角假设时，却十分棘手，推出了一些难以置信的结论，却找不到自相矛盾的地方。例如，他证明了，如果锐角假设成立，那么对于平面上的一条

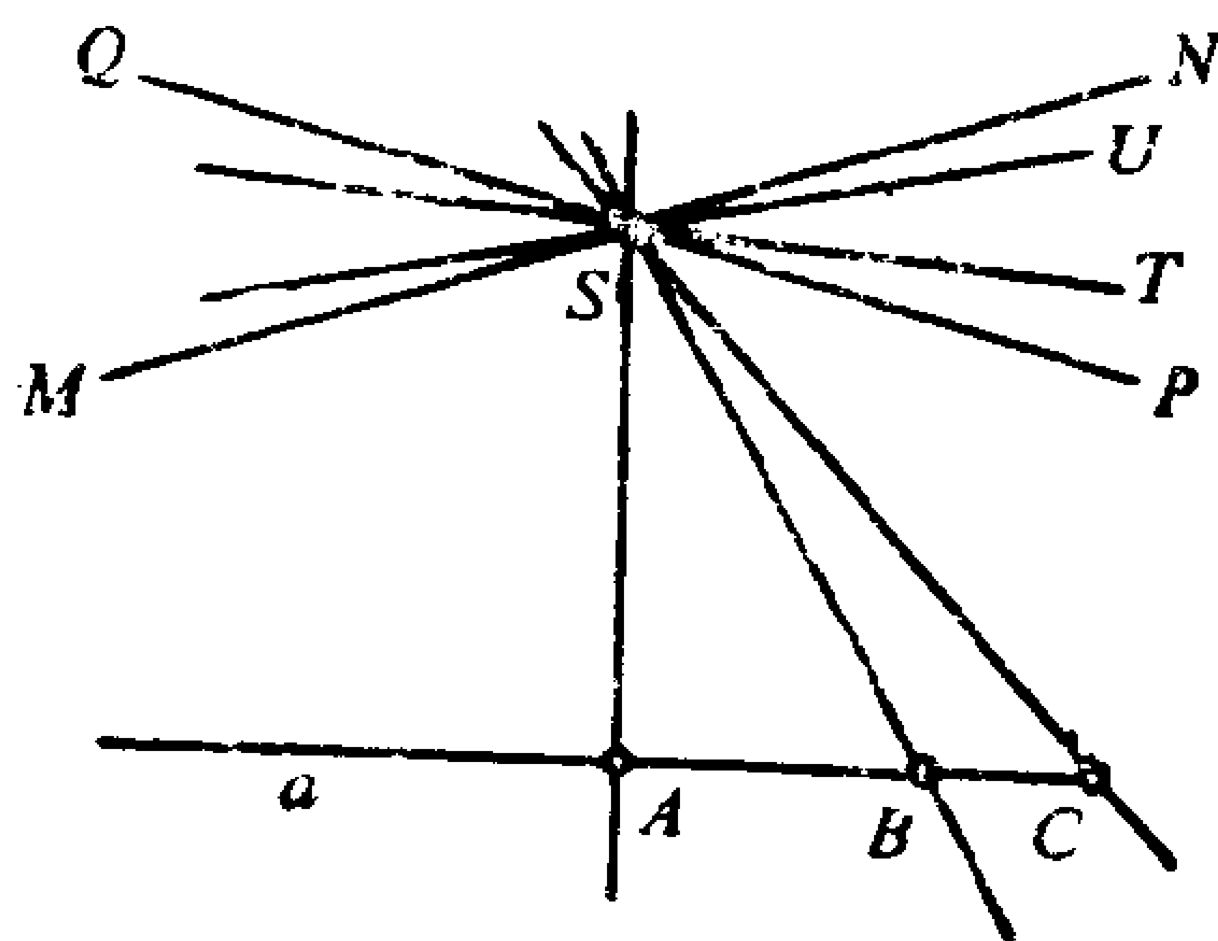


图 4—2

直线a 和直线外一点S，这平面内过S的一切直线分成两类， 一类与直线a有公共点，另一类与直线 a没有公共点。后一类中包含着这两类的分界直线SM和SP，这两条分界直线都是直线a的渐近线。这个结论从逻辑上挑不出毛病，却与人们的经验格格不入。萨开里还得到，如果锐角假设成立，那么三角形的面积将与其内角和不是二直角的部分成正比。后面这个结果更加难以想象。萨开里还导出了许多类似的结果，他觉得虽然没有导出逻辑矛盾，但是得到的这些结论与人们的

经验不相容，因而断言锐角假设一定不能成立。这样一来，他就可以断言欧几里得第五公设成立了．于是他在1733年出版了他的书《欧几里得无懈可击》

很明显，萨开里这本书本身就是有懈可击的，他已经在锐角假设之下得到一系列有价值的定理，这些定理属于一种新的几何学，跟熟知的欧几里得那一套几何学完全不同，这至少可以表明，在《几何原本》的公设1～4和公理1～5的基础上，可以添进与欧几里得第五公设等价的直角假设，也可以添进与欧几里得第五公设相矛盾的锐角假设．添进直角假设以后，就可以展开欧几里得的那一套几何学；而如果添进锐角假设，就能展现另一套新的几何学，这才是萨开里应该作出的结论．但是他却说他证明了欧几里得第五公设．

在谈到萨开里的工作时，几乎所有的人都为他惋惜．他已经闯进了新几何学的大门，但他却对新几何学视而不见，他本应成为新几何学的发现者，但是现在只能称他为新几何学的先行者．

也有少数数学史家持另一种看法，认为萨开里是几何学界的哥白尼，他已发现了一种与欧几里得体系不同的新的几何体系，却假装不相信，

为的是让他的书能够出版，并且不致遭受压制和惩罚。

撇开对萨开里个人的评价，从数学思想上来看，当时确实还没有接触到问题的核心，人们可以理直气壮地责问：难道一套尚未推出逻辑矛盾的几何命题系统就能算做一种几何学吗？谬论也可在一定范围内自圆其说，真理要靠实践检验。从人类长期实践经验来看，我们世界的真实的几何学，除去欧几里得的几何学而外，还能有别的什么几何学呢？

几何学与人类实践经验的关系，就是整个问题的核心，在通常人们实践活动所及的范围内，欧几里得的几何学与人们的经验相符，而与它对立的新几何学却还拿不出符合经验的证据。

萨开里是新几何学的第一位先行者。随后的几位先行者是：兰贝特（1728～1777），须外卡尔特（1780～1859）和他的外甥托里努斯（1794～1874）。兰贝特考虑有三个角是直角的四边形，对于第四个角，从逻辑上可作出直角、钝角、锐角三种假定。兰贝特注意到，直角假定等价于欧几里得第五公设；钝角假定虽然与《几何原本》的公设 1～4 和公理 1～5 相矛盾，但是导出的一些结论却与球面几何学的定理一致；对

于从锐角假定导出的结论，他猜想可应用于虚半径球面上的图形，兰贝特认为，只要一种假定不导致矛盾，就一定提供一种可能的几何；能够适用于真实图形的是一种特殊的几何，这并不妨碍去发展逻辑上可能的各种几何。须外卡尔特把新几何称为星空几何，他觉得这种几何可能在星空里成立，托里努斯证明了，虚半径球面上成立的公式与星空几何中的相同。



图 4—3 高 斯

一般认为，这种与欧几里得几何学相对立的新几何学，是由三个人互相独立地建立的。这三个人是：德国的高斯（1777～1855）、俄国的罗巴切夫斯基（1792～1856）和匈牙利的亚诺什·鲍耶（1802～1860）。

高斯最早研究这种新的几何，并且深信它在逻辑上相容，现在流行的术语“非欧几里得几何学”，就是起源于高斯，他确认欧几里得第五公设不能从《几何原本》的其余公设、公理导出，并

且认为不能证明现实世界的几何一定是欧几里得的几何。他在1817年写给奥尔伯斯的信中说：“我愈来愈深信我们不能证明我们的〔欧几里得〕几何具有〔物理的〕必然性，至少不能用人类理智，也不能给予人类理智以这种证明。或许在另一个世界中我们可能得以洞察空间的性质，而现在这是不能达到的。直到那时我们决不能把几何与算术相提并论，因为算术是纯粹先验的，但可以把几何与力学相提并论。”

高斯的这段话，看上去有些玄乎，却包含着了解整个问题的钥匙，尤其最后一句“可以把几何与力学相提并论”，更是点睛之笔。

力学基本定律是从人类实践经验中概括总结出来的．由于实际现象往往受多方面因素影响，在概括总结规律时，常需置某些因素于不顾，进行适当的简化和理想化，得到某种物理模型。当一个实际问题可简化成这个物理模型时，就能应用有关的力学定律。

几何公理也是从人类社会实践经验中概括总结出来的。在概括总结公理时，常需进行适当的简化和理想化，得到某种几何模型。当一个实际问题可简化成这样的几何模型时，就能应用有关的几何定理。

在简化和理想化时，必然忽略某些次要因素。因而，根据经验概括总结出来的力学定律或几何公理通常只是实际情形在某种程度上的近似。又因为实践经验受时间、场所、观测条件、误差等多方面因素影响，所以，由它们概括总结出来的普遍定律或公理，在实践易于检验的场合可以确信非常接近于真理，而在实践不易检验的场合，把握就比较小。

欧几里得第五公设是为了研究平行线的理论而引进的，它涉及两直线同时无限伸展的情况。这种情况，人们不可能实际看到，而只能借助推测和想象。如果两直线被第三直线截得的一组同侧内角之和比二直角小得多，我们可以亲眼看见这两条直线确实在不太远的地方相交。如果这一组同侧内角的和比较靠近二直角，那么根据两直线沿一侧明显地逐渐靠拢的趋势，可以推测，将两直线适当延长，必能在这一侧相交，不过也许交点要落到用来画图的这张纸的外面。不妨设想这张纸有一种神奇的特性，能够伸展到很远很远的地方，要多远有多远，只要两直线相交，交点就一定落在这张纸的范围内．于是，当同侧内角之和逐渐增大而无限趋近于二直角时，两直线的交点就将沿着这神奇的纸面，远离我们，飞驰而去。在

某一瞬间，交点到我们的距离有月亮那么远；在另一瞬间，距离增大到象太阳那样远；再往后去，交点就将直插遥远的星空了。我们可以想象，只要同侧内角之和还没有达到二直角，交点总不会消逝.把这种想象用数学语言表达出来，就得到欧几里得第五公设。从欧几里得第五公设和其他一些公理、概念出发，可以演成一个关于概念和定理的无矛盾的逻辑系统，这就是欧几里得几何学，它提供了一个简单的几何模型，在通常人们实践活动所及的范围内，能与经验以很高的精确度相符合.

另一方面，在几何课本中谈到平行射影时，能够举出的最典型的实例，是物体在阳光下的影子，在这种场合，从太阳照射到地球上的光线，被看成典型的平行光线，关于平行光束通过凸透镜后聚焦的物理实验，也是选取阳光作为平行光束的来源。在用望远镜指向夜空观测天象时，人们毫不怀疑，进入镜筒的月光或星光都是标准的平行光线。从上面这些实践经验出发，可以认为平面内两直线被第三直线截得的同侧内角之和充分接近二直角时，这两条直线就不再相交。把这个认识作为一个基本假设规定下来，就得到一条与欧几里得第五公设相对立的公理。从这条新的公理和其他一些公理、概念出发，如果能演绎成

一个无矛盾的逻辑系统，就得到一个新的几何模型。这个新几何模型在理论上与欧几里得几何模型必然有显著区别，但在通常人们实践活动所及范围内，同样也能以很高的精度与经验相符。这样一个新的几何模型,就提供了一种新的几何学.

如果单纯从理论上考虑，只能判断哪种模型更简单些，不能确定谁真谁假. 没有理由说我们世界的几何学一定是欧几里得几何学。只有通过实践的检验. 才能知道，在一定范围内，采用哪种几何模型更好。

高斯除去对欧几里得第五公设问题有深刻的见解而外，还对非欧几里得几何进行了具体的研究，并且实际测量以三个山峰为顶点的三角形的内角和，试图检验哪种几何学更符合实际。但是高斯生前从不公开发表自己有关第五公设和非欧几何的工作。虽然他是一位极有影响的大数学家，但是他担心别人不理解这方面的工作，贸然发表，会引来很多麻烦。

罗巴切夫斯基（1793～1856）是俄国喀山大学数理系的教授。他第一个公开发表与欧几里得第五公设相对立的新几何，并且为了使这种新几何能被人们接受而奋斗终生。所以，这种几何常被人们称为罗巴切夫斯基几何（更恰当的名称是


图 4—4 罗巴切夫斯基

双曲几何）。他是1826年在喀山大学数理系的一次会议上宣读的论文中提出新几何学概要的。在这次宣读的论文《论几何原理》中，他只扼要叙述结果，略去了证明。

在引言和概念部分后面，罗巴切夫斯基插进了一段经过精心挑选的对比材料.他把普通的三角形叫做直边三角形，以区别于球面上由三条大圆弧组成的球面三角形。他挑选出直线三角形和球面三角形的某些性质，逐条对比叙述，让听众明显地感到，两者在一部分性质上完全类似，在另一部分性质上却截然相反。然后才开始介绍新几何学，他称之为“想象的几何学”。在介绍新几何学内容时，他也注意与球面几何学对比。所谓“想象的几何学”中的直边三角形，与欧几里得几何学中的直边三角形在性质上差别很大，而与欧几里得几何学中的球面三角形倒比较接近，很多性质可以一一对应。罗巴切夫斯基特别把新几何学中的直边

三角形的边角关系与欧几里得几何中的球面三角形的边角关系进行了对比.他指出,可以从新几何学的直边三角形边角关系出发,解析地推导出新几何学中的各种几何结论.因此,新几何学如果包含任何逻辑矛盾,必然会在它的直边三角形边角关系中有所反映。而在新几何学的直边三角形边角关系中,如果把三边a、b、c、换成 $a\sqrt{-1}$、$b\sqrt{-1}$、$c\sqrt{-1}$,这些关系式就变成欧几里得几何中熟知的球面三角形边角关系。由此,罗巴切夫斯基得出结论:“通常的几何学、三角学和这个新几何学总是彼此吻合的.”可以这样理解他的结论:既然可借助虚数把两种几何互相沟通,那么如果新几何包含逻辑矛盾,通常的欧几里得几何学就也要包含相应的逻辑矛盾;大家都相信通常的几何不含矛盾,所以对新几何学在逻辑结构上的相容性也应寄予同样程度的信任。

罗巴切夫斯基这种“转移矛盾”的想法,对于证明无矛盾性问题,是非常有效的。但是罗巴切夫斯基选取三角形边角关系作为转移矛盾的通道,却妨碍了任务的彻底完成。他实际上只证明了,在新几何学中,由三角形的边角关系及其推论所组成的部分不含逻辑矛盾。整个新几何学是

否包含逻辑矛盾，仍未证明。

而且，即使新几何学确实不含逻辑矛盾，也还存在另一个更严重的问题：新几何学究竟能不能反映现实世界的客观规律呢？

罗巴切夫斯基试图通过计算天狼星的视差来证明新几何学在研究星空时优于通常的几何学，但是计算结果并未提供有力的证据。

罗巴切夫斯基还通过考虑新几何学中一些涉及积分的几何量，求出某些积分的值.他的提交审查的论文被送到奥斯特洛格拉德斯基院士（1801～1862）手里。奥斯特洛格拉德斯基没有注意论文中的几何问题，却对罗巴切夫斯基用几何想法求出的两个定积分发生了兴趣。结果发现，这两个用新方法求出的定积分，一个是已知的，并且很容易利用积分法求得，另一个则算得不对。罗巴切夫斯基原想通过寻找新几何学在其他数学分支中的应用，来争取人们对新几何学的支持，不料却因此而受到意外的打击。

但是罗巴切夫斯基毫不气馁。他仍然坚持研究新几何学，发表了《带有完整的平行理论的新几何原本》、《想象的几何学》、《泛几何学》等论著，为争取新几何学能被人们理解和承认而奋斗不息。



图 4—5 亚诺什·鲍耶

非欧几何的第三位发现者亚诺什·鲍耶（1802～1860）只在1832年发表了一篇关于非欧几何的论文，作为他父亲的一本书的附录而刊行，这篇论文相当系统地论述了新几何学的基本问题，与罗巴切夫斯基的研究途径有些类似的地方。虽然罗巴切夫斯基比他早发表非欧几何，但是当他看到后来罗巴切夫斯基继续发表的论文时，曾经怀疑罗巴切夫斯基是抄袭他的工作。亚诺什·鲍耶的父亲伏尔夫刚·法卡斯·鲍耶是高斯的朋友，伏尔夫刚把亚诺什的工作寄给高斯，请高斯提意见，高斯答复说，不能赞扬伏尔夫刚的儿子，否则就是赞扬高斯自己，因为高斯早就做了这方面的工作。

在回顾欧几里得第五公设问题的研究史时，总是要提到，三个人，在三个不同的国家里，在差不多的时间里各自独立地发现了非欧几何，这是一个很奇怪又很自然的巧合。

有人分析，亚诺什·鲍耶的父亲是高斯的朋

友，亚诺什可能通过他的父亲，间接地受到高斯的影响；罗巴切夫斯基的一位老师巴特斯曾经是高斯的同事，罗巴切夫斯基也可能通过巴特斯，间接地受到高斯的影响。

更多的人赞赏伏尔夫刚·鲍耶的一段名言。伏尔夫刚在给亚诺什·鲍耶的一封信中写道："许多思想好象有自己的时代似的。在它的时间里，它们同时在不同的地区被发现着，就象春天的紫罗兰在阳光照耀的地方到处生长一样。"

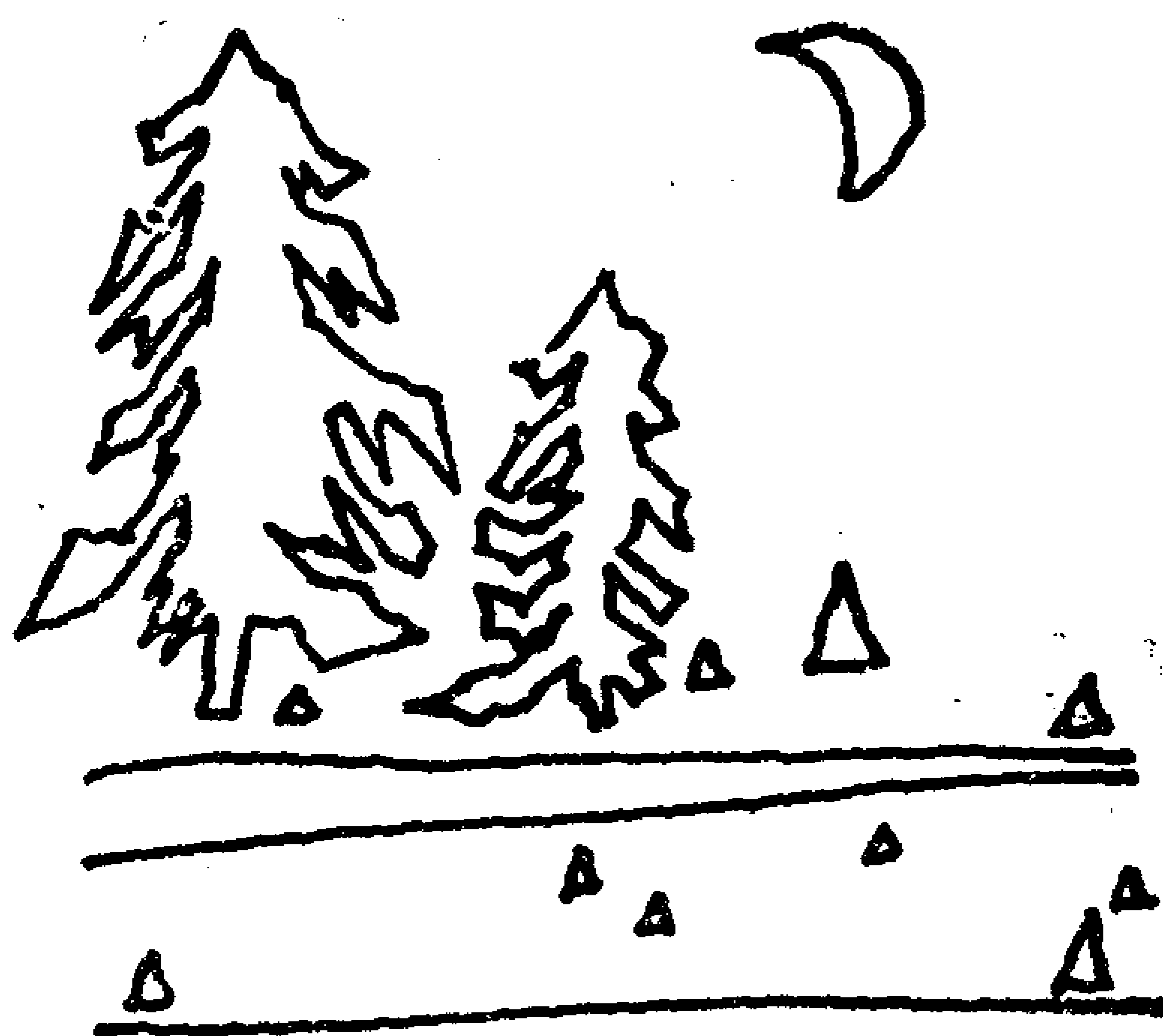
从欧几里得开始，直到高斯、罗巴切夫斯基和亚诺什·鲍耶，研究第五公设问题所用的方法，基本上都还是《几何原本》中的那一套初等方法。人们普遍认为欧几里得第五公设问题是一个非常初等的问题，只涉及中学的平面几何和立体几何，因而也局限在初等的框架中考虑它。缺乏更加有效的研究工具和更加深刻的数学思想，因而进展极其缓慢。现在终于迈出了关键性的一步：非欧几何的发现者们已经冲破传统观念的束缚，清楚地认识到，几何学并非只有欧几里得的一种体系，还存在与欧几里得不同的其他体系，并且展示出一种非欧几何的基本内容。但是，由于仍局限在初等框架内考虑，所以对新几何学未能充分理解其实质，以致高斯在生前不敢发表这方

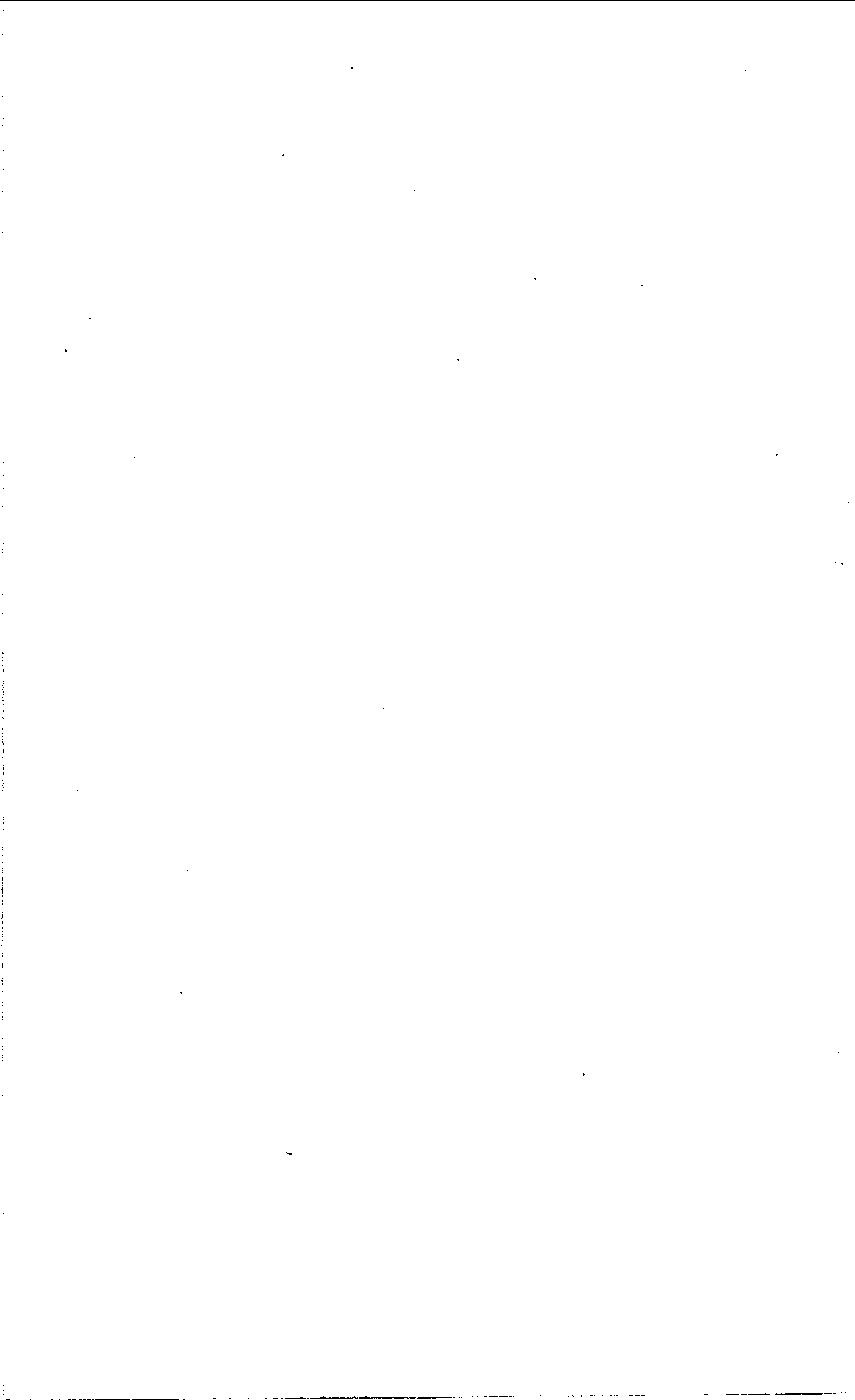
面的工作，另两位虽然发表了，但在有生之年，都没有能使新几何学被人们理解和承认。

1855年高斯逝世后，由于整理他遗留下来的手稿和信件，数学界才普遍知道，这位“数学家之王”早已对非欧几何进行了长期的研究。于是人们立刻意识到，对这个问题不可等闲视之。数学家们把当时拥有的各种先进的数学思想和数学知识都用来研究欧几里得第五公设问题，使局面迅速改观。

1868年，意大利数学家贝尔脱拉米利用当时微分几何的最新研究成果，证明了伪球面上的几何学是双曲几何学。伪球面是一种形如喇叭的特殊曲面，具体而又实在。由此可见，这种由高斯、罗巴切夫斯基和亚诺什·鲍耶发现的新几何学，确实反映现实世界的某些客观规律。几何学研究终于冲出欧几里得体系的篱笆，走向辽阔无边的田野。

五 曲面上的非欧几何





连林人不觉，

独树众乃奇。

（晋）陶渊明：《饮酒二十首》

其实，几何学早已不是欧几里得体系的一统天下。如果广义地把“非欧几何学”理解成一切与欧几里得体系不同的几何学，那么罗巴切夫斯基几何也不是历史上最早出现的一种非欧几何。仅仅由于罗巴切夫斯基几何直接向欧几里得第五公设挑战，才引来这么多麻烦。另外一些非欧几何，或者与欧几里得几何的定理交织在一起，或者变相地以欧氏面貌出现，人们习以为常，并不深究。

由于天文观测和编制历法的需要，早在古代埃及和巴比伦就已开始研究球面几何学。流传至

今的古代希腊数学著作中，最早的一部是公元前四世纪末写成的《论运动的球面》，研究与球面绕其直径转动有关的性质．球面几何学一直被看成欧氏几何学中立体几何学的一部分，因为通常研究球面的性质时，总是借助球心、半径和通过球心的截面．但是我们也可在相当多的情形下把球心、球半径、截平面等拐杖扔掉，把视线完全局限在一个球面内研究球面的性质，就象在平面几何学中把视线局限在一个平面里一样．当我们这样考虑时，就会发现球面几何学中有很多概念和定理都能与平面几何学对应起来：球面上的大圆对应于平面上的直线，球面三角形对应于平面上的三角形，球面上的小圆对应于平面上的圆．可以把平面上研究角的大小和度量的一套办法直接搬到球面上，来研究两个大圆相交所成的角，而不必借助大圆所在平面相交所成的二面角．球面三角形的一边BC的大小a，可直接取成大圆劣弧$\overset{\frown}{BC}$的长度，而不必取成球半径OB与OC的夹角α，在球面三角学公式中出现球心角α时，我们就用$\frac{a}{R}$代替，这里R是球半径，可以不考虑R与球心的联系，而只把R看成与球面上长度单位有关的一个常数．现在将一个球面三角形与一个平

面三角形对比，两者的三边长度都记成 a、b、c，它们的对角记成 A、B、C，三角形的面积记为S，在这两种几何学中，关于三角形内角和的定理分别是

平面： $A+B+C=\pi$

球面： $A+B+C>\pi$

这两个定理既互相对应，又有显著区别，关于三角形的边角关系，情况也是这样，试以正弦定理为例，对比如下：

平面：$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

球面：$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}$$

当 $R\to\infty$时，$\frac{a}{R}$、$\frac{b}{R}$和$\frac{c}{R}$都趋于 0，由于

$\sin x\approx x$ （若$|x|$很小）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

可知当R很大时，利用球面正弦定理计算的结果，与利用平面正弦定理计算结果相近，并且平面正弦定理可看成球面正弦定理在$R\to\infty$时的极限情形，如果在足球场上画一个大三角形，并且

把 R 取成地球平均半径6371千米，那么无论对这个三角形应用平面三角公式或球面三角公式，在电子计算器帮助下，计算过程都不太麻烦，而且所得结果都能以很高的精确度与实际测量相符。这说明球面几何学可看成一种非欧的平面几何学，它在一定范围内能与实践经验很好地相符。

如果我们把考虑的范围从足球场那样大小扩大到一个省的界限以内，那么用球面几何学计算的结果将与用平面几何学计算的结果出现一些差异，但是这两者中，更接近于实际测量结果的，将是球面几何学，而不是平面几何学。这是因为我们生活在地球上，从大范围看，地面的形状更接近于球面；只有在足够小的范围内，才能把地面的形状近似看成平面。

大地是人类社会实践活动的主要场所。丈量土地、划分疆界、兴建道路、确定航线，这许多工作都需要研究与大地表面有关的各种几何问题。把地面看成平面，只是最初步最简单的近似。把地面看成球面，近似的程度改进了很多，但是毕竟地球表面不是一个光滑的大皮球，既有一望无边的茫茫原野，也不乏蜿蜒崎岖的崇山峻岭和深邃浩瀚的大海大洋。地球表面的形状，是一个极其复杂的曲面。

自从解析几何和微积分学兴起以后，便开始了对曲线和曲面的一般理论的研究。解析几何的基本思想是坐标化：一片曲面可用动点坐标 x、y、z 所满足的一个方程确定，或者等价地，用含有两个参数u、v的参数方程确定有序数组 (u,v) 可以确定曲面上的点的位置，称为曲面上的曲纹坐标。一条曲线可用含一个参数 t 的参数方程确定。如果给出曲面参数u、v 作为参数 t的已知函数 $u(t)$、$v(t)$，就给出了曲面上的一条曲线。

微积分学的基本思想之一是局部近似：在一个适当小的邻域内，用较简单的事物近似代替较复杂的事物，并设法控制误差的数量级或误差界。这种想法，无论对于研究复杂函数或复杂图形，都显得非常有效。

一条任意光滑曲线C在其一点P附近的一小段曲线弧，可以近似地看成一条直线 PT 上的微小线段，这条直线 PT 就是曲线C在点P的切线。在曲线C上P点附近另取一点Q，让Q沿曲线无限趋近于P点，则割线 PQ 的极限位置定义为曲线C在点P的切线。在过点P的所有直线中，切线PT是在点P附近最接近于曲线的一条。

类似地，设S是一个任意的光滑曲面，P是S上任意一点，在S上P点附近另取不同两点M、

N，使三点 P、M、N 不在一直线上，过不共线三点 P、M、N 作平面，令M和N沿曲面S无限趋近于P，则平面PMN的极限位置称为曲面S在点P的切平面。曲面S在点P附近的一小块曲面片，可以近似地看成位于S在P点的切平面μ上的小块平面区域。在通过P的所有平面中，切平面μ是在P点附近最接近于曲面的一个。过P点作切平面μ的垂线l，则直线l称为曲面S在点P的法线。

知道了曲线在一点的切线、曲面在一点的切平面或法线，就知道了曲线、曲面在指定点的方向。但是仅知道方向还远远不够，因为曲线和曲面的最本质的特性是弯曲。为了反映弯曲的程度，需要引进曲率概念。

最简单的线是直线，最简单的弯曲的线是圆。为了反映曲线C在一点P附近的弯曲情况，我们在曲线C上P点附近取另外两点M、N，使三点P、M、N不在一直线上，然后在平面PMN内通过不共线三点P、M、N作圆，让两点M、N沿曲线C无限趋近于点P，圆PMN的极限位置称为曲线C在点P的曲率圆。曲率圆的圆心O称为曲线C在点P的曲率中心；曲率圆的半径$R=OP$称为曲线C在点P的曲率半径；曲率半径R的倒数

$k=\frac{1}{R}$称为曲线C在点P的曲率．曲率圆与曲线C在P点相切，即在P点有公共的切线。与曲线C在点P相切的圆有无穷多个，曲率圆是其中与曲线C的关系最为密切的一个，即在P点附近，曲率圆比其它圆更接近于曲线C。所以，曲率圆又叫密切圆．在考察曲线在一点附近的弯曲情况时，可将曲线C在其点P附近的一小段曲线弧近似看成在P点的密切圆上的小段圆弧．直线的曲率为O。

为了定义曲面的曲率，需要进行更细致的考虑．设曲面S在点P的法线是l，在l上指定一个正方向．设PT是S在点P的切平面μ上的任一方

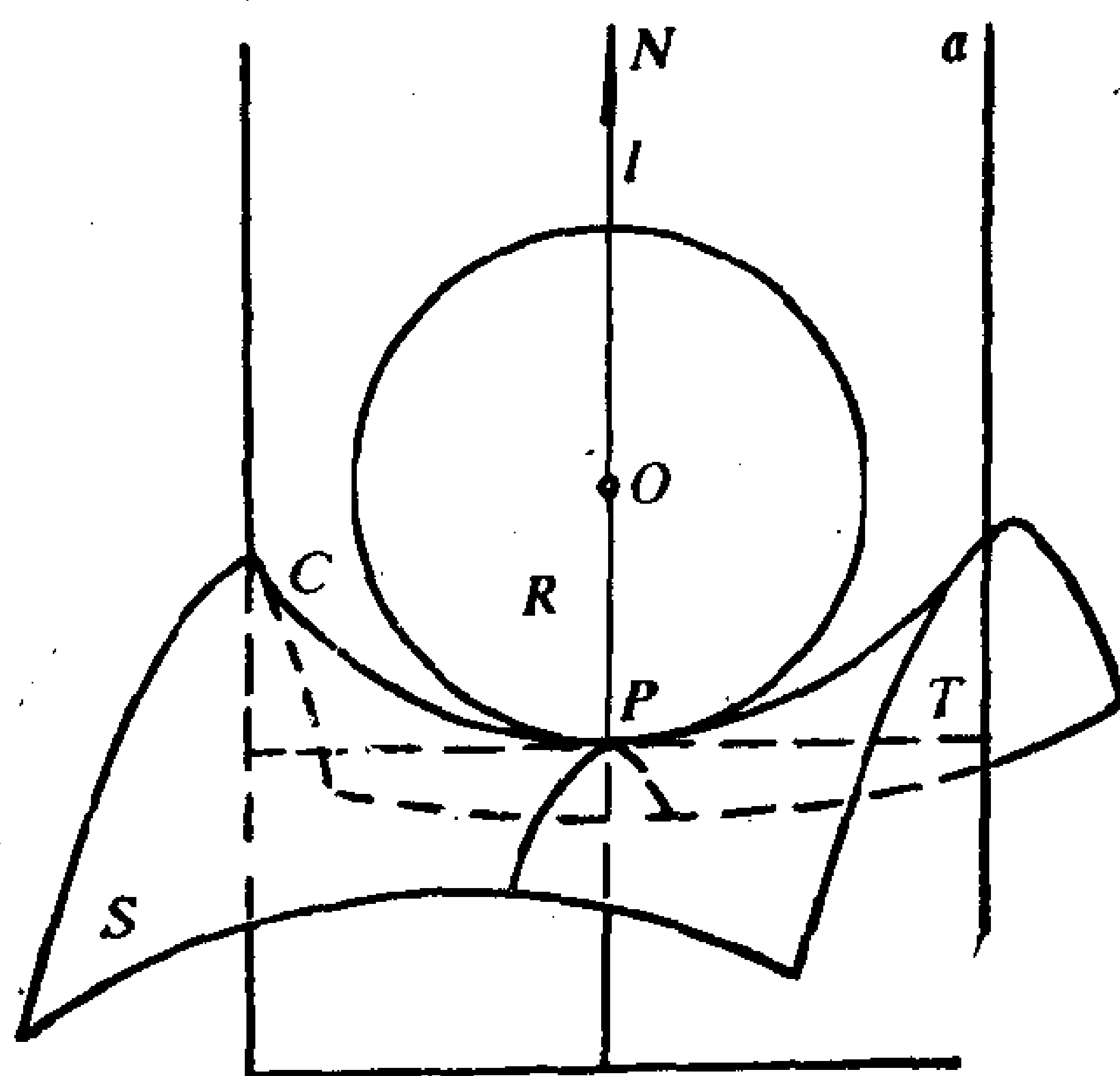


图 5—1

向，则曲面S在点P处沿不同方向的弯曲情况一般不同。如图，过法线 l 和直线PT作截平面α，称为曲面S在点P沿方向PT 的法截面，法截面α与曲面S的交线C叫做法截线。设法截线在点P的曲率为 $k=\frac{1}{R}$，曲率中心为O（当$k=0$时O点不存在）。规定

$$k_n=\begin{cases}k, & \text{若}PO\text{沿法线正方向}\\ 0, & \text{若}k=0\\ -k, & \text{若}PO\text{沿法线负方向}\end{cases}$$

数k_n叫做曲面S在点P沿方向PT 的法曲率。让法截面α绕法线l旋转一周，则对应的法曲率k_n随之连续变化，周而复始，所以曲面S在点P沿不同方向的法曲率中，必有最大值和最小值，用k_1和k_2表示这两个极端值。数k_1和k_2叫做曲面S在点P的两个主曲率，取得主曲率的方向叫做主方向。主方向指明曲面在一点弯曲得“最厉害”和“最不厉害”的方向，主曲率表明在这两个极端方向上的弯曲程度和向着法线的哪一侧弯曲。

以上是把曲面在一点沿不同方向的弯曲情况相互比较。为了把曲面在不同点的弯曲情况互相比较，再定义两个量：

$$K=k_1k_2,\quad H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

其中k_1和k_2是曲面S在其任意点P的两个主曲率。K称为曲面S在点P的高斯曲率，H称为曲面S在点P的平均曲率。

例如，平面在每一点沿任何方向的法截线都是直线，所以平面在其各点恒有$k_1=k_2=0, K=0, H=0$。

半径为R的球面，在其每一点沿任何方向的法截线都是大圆，所以球面在其各点恒有$k_1=k_2=\frac{1}{R}$，$K=\frac{1}{R^2}$，$H=\frac{1}{R}$。

如果已知曲面的参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

就可以求出弧长元素的表达式

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

其中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$$

$$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$$

$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$$

下标u、v表示对u的偏导数和对v的偏导数。

一般说来，要了解曲面的性质，常需跳出曲面范围之外，在空间找一些辅助图形如法线、截面等帮助研究。这些性质叫做曲面的外在性质。如果只局限在曲面的范围以内，就不可能认识曲

面的外在性质，例如上面说到的法曲率、主曲率等。

但是，也有另外一些性质，只要知道 ds^2 的表达式，或者等价地，只要知道表达式中的系数 $E(u,v)$、$F(u,v)$和 $G(u,v)$，就能推导出来。只用 E、F、G 就能导出的性质，称为曲面的内蕴性质。一个曲面的全部内蕴性质，构成一套几何学，叫做这个曲面的内蕴几何学；有时为了说话方便，简单地称之为这个曲面上的几何学。研究曲面的内蕴几何学，除去需要知道函数 $E(u,v)$、$F(u,v)$、$G(u,v)$ 和参数 u、v 的变化范围而外，不需要从曲面以外获得任何信息，甚至也不必关心 E、F、G 是怎样从曲面方程推导出来的。

在这种观点之下，平面几何学不是别的，恰好就是平面的内蕴几何学。全套平面几何学都能用解析的方法从下式导出：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty)$$

式中的x、y是通常的平面直角坐标。

类似地，球面几何学是球面的内蕴几何学。对于半径为a的球面，用θ 表示经度角，φ表示纬度角，则有

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

$$\left(0\leqslant\theta<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

对于圆柱面，设其截面圆半径是a，可得

$$ds^2=dl^2+a^2d\theta^2$$

$$(-\infty<l<+\infty, 0\leqslant\theta<2\pi)$$

令 $l=x$，$a\theta=y$，上式化为

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ 0\leqslant y<2\pi a)$$

与平面的情形对照，可知圆柱面的内蕴几何学与平面在两平行线间的带形区域内的几何学一致。事实上，把圆柱面沿着一条母线剪开，然后铺平，就得到对应的平面带形区域。

如果能象圆柱面和平面这样，对一个曲面S_1的参数作适当变换，使它的 ds^2 表达式化为另一曲面S_2的ds^2表达式，就说曲面 S_1和S_2 是等距的；如果不存在这样的变换，就说 S_1和S_2 不等距。

在平面几何中，两点之间，直线最短。对应地，在任意曲面上，考虑连接两点的所有曲线中最短的一条，称它为短程线，又叫测地线。在进行大地测量时，为了测量两点之间的地面距离，测绳就是沿着测地线放置的，把任意曲面的内蕴几何学与平面几何学对照，曲面上的测地线相当

于平面上的直线。由此还可进而考虑曲面上两条曲线的交角、曲面区域的面积，等等，这些都属于曲面的内蕴几何学的内容。

上面这些几何研究，最初开始于微积分学的几何应用，后来逐渐发展成一门数学分支，叫做微分几何学。微分几何学的独立宣言是高斯在1827年发表的著名论文《关于曲面的一般研究》。在这篇论文中包含了一个影响深远的结果：曲面在任意点的高斯曲率K也是一个内蕴量，即K可用E、F、G及其偏导数表示。这样一来，在曲面的每一点都有了一个描写弯曲情况的量K，由此可导出曲面内蕴几何学中的许多重要定理。例如，可以把平面几何学中的“三角形内角和等于π”推广到曲面的内蕴几何学，结果如下。

曲面上由三条顺次首尾相连的测地线弧围成的图形叫做测地三角形。仿照平面上的三角形，可以考虑测地三角形的边、内角、外角、面积。设测地三角形的三个内角分别是α,β,γ，三边包围的曲面区域是D，曲面的面积元素是$d\sigma$，高斯曲率是K。高斯证明了下面的公式：

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\iint_D \kappa d\sigma$$

由此推出，如果在曲面的某个区域内恒有$K=0$，

那么在这个区域内的任何测地三角形的三内角之和等于 π，与欧几里得平面几何学的对应结论相同；如果在某个区域内恒有$K>0$，那么这个区域内的每个测地三角形的内角和都大于π；如果在某个区域内恒有$K<0$，那么在这个区域内的每个测地三角形的内角和都小于 π。测地三角形的内角和与π 的差，与测地三角形所包围的区域内各点的高斯曲率有关。仅仅通过这一个定理，就可以看出，各种不同曲面的内蕴几何学之间，可能存在着极大的差别。

现在设想在曲面S上生活着一些有智慧的高级动物，例如某种外星人。他们从未听说过欧几里得的《几何原本》，仅仅通过自己的实践经验认识了曲面S的内蕴几何学，在他们的语言系统里，他们赖以生存的曲面S被叫做“平面”，曲面S上的测地线被叫做“直线”，S上的测地三角形被简单地叫做“三角形”。那么这种外星人也将有自己的一套平面几何学。在我们看来，这种外星人的平面几何学，其实就是曲面S的内蕴几何学，它与欧几里得平面几何学大不相同，是十分自然的，完全可以理解。而在这种外星人看来，他们的这种特别的平面几何学是唯一符合他们长期实践经验的几何学，如果有谁从地球上带

去一部欧几里得的《几何原本》，就会被视为异端邪说，群起而攻之。

我们再设想在每个曲面上都生活着一种外星人，他们都把自己所在曲面的内蕴几何学奉为唯一符合自己实践经验的平面几何学，于是平面几何学就有了无数种不同的流派，每种流派都有坚实的生活基础，各自反映现实世界的某些客观规律。互相等距的曲面，其内蕴几何学属于同一流派；互不等距的曲面，内蕴几何学属于不同流派。欧几里得几何学只不过是这无数流派中的一种，最简单，但是适用的范围极其有限。任何一个曲面，只要高斯曲率不恒为0，它的内蕴几何学都提供了一种不同于欧几里得流派的平面几何学，简而言之，也就是一种非欧几何学。

在各种曲面的内蕴几何学中，K等于常数的情形最为简单，从关于测地三角形内角和的一般公式

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\iint_D K d\sigma$$

在K为常数的特殊情形下，得到

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=KA \qquad (1)$$

这里A表示测地三角形的面积$\iint_D d\sigma$。根据常数K

为正、为负、为零，得到三种不同的几何。

当$K=0$时，（1）式成为

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \tag{1_0}$$

这就是欧氏几何学中“三角形内角和为二直角”的熟知定理，它是欧几里得第五公设的一个等价命题。

当$K>0$时，令$K=\frac{1}{a^2}$，（1）式成为

$$A=a^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi) \tag{1_+}$$

这是球面几何学中的一个熟知的定理：上式右边括号中的量 $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ 叫做球面三角形的角盈，上式表示球面三角形的面积与角盈成正比，比例系数等于球半径的平方。

当$K<0$时，令$K=-\frac{1}{a^2}$，（1）式成为

$$A=a^2[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)] \tag{1_-}$$

上式右边方括号中的量叫做三角形的角欠。上式表明，在K为负常数的几何中，三角形的面积与角欠成正比。

K为负常数的曲面叫做伪球曲面。伪球曲面的几何学和球面几何学在很多方面都能一一对应，就象等式(1_-)和(1_+)互相对应一样；它们是两种最简单的非欧几何学。

在各种伪球曲面中，最简单的一种叫做伪球面。这是一种形如喇叭的旋转曲面，它的方程可以写成下面的参数形式：

$$x = a\sin u\cos v$$

$$y = a\sin u\sin v$$

$$z = a\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2} + a\cos u$$

$$\left(0 < u \leqslant \frac{\pi}{2},\right.$$

$$\left.0 \leqslant v < 2\pi\right)$$

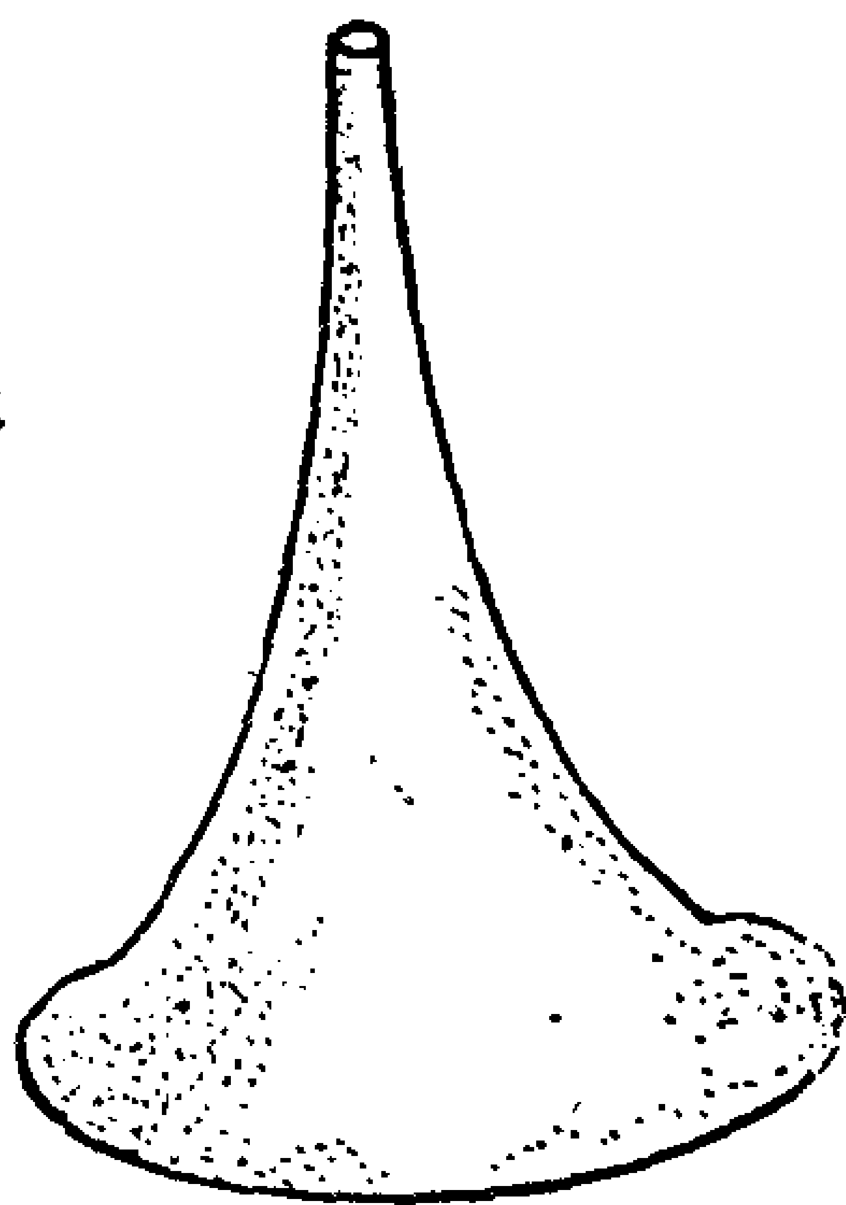


图 5—2

通过计算，容易得到，伪球面上的弧元由下式给出：

$$ds^2 = a^2\mathrm{ctg}^2 u du^2 + a^2\sin^2 u dv^2$$

这里$E = a^2\mathrm{ctg}^2 u$，$F = 0$，$G = a^2\sin^2 u$。当$F = 0$时，高斯曲率可由下式算出：

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v + \left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}$$

把E和G的值代入，便可验证

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$

上面在伪球面的方程中限制了$0<u\leqslant\frac{\pi}{2}$。也可把范围扩大为$0<u<\pi$，这时曲面由图中所示的张口向下的喇叭形曲面片和一个与它对称的张口向上的喇叭形曲面片面对面地拼合而成，在拼合处有一圆圈形的尖棱。

1840年，闵定格证明了，伪球面上的测地三角形的边角关系，可从球面三角学公式中把边的三角函数换成双角函数而得到。利用闵定格的这个结果，1868年贝尔脱拉米证明了，伪球面的内蕴几何学是罗巴切夫斯基的平面几何学。不过，正如圆柱面只能与欧几里得平面的一个带形区域等距，伪球面也只能与罗巴切夫斯基平面的一部分等距。

通过贝尔脱拉米的解释，罗巴切夫斯基的"想象的几何学"不再停留在纯粹的想象之中，已经能在现实世界的伪球面上找到了落脚点。非欧几何学终于得到了人们的普遍承认。

贝尔脱拉米利用伪球面对非欧几何学作出的解释，标志着欧几里得第五公设研究与微分几何研究的会合。通过欧几里得第五公设的研究，发

现了一种非欧几何，却得不到理解；通过微分几何研究，产生了无数种非欧几何，却没有发现它们的非欧实质。一旦这两方面的研究会合到一起，人们顿时感到思路豁然开朗。新观点与新方法、新结果的结合，带来了几何空间概念的大发展，几何学研究出现了欣欣向荣的新局面。

从此以后，欧几里得第五公设问题的研究终于跟上了时代的步伐，不再停留在初等水平上爬行。它的每一次新的重大进展，都是几何学跨入新阶段的历史见证。

六 空间概念的发展



等闲识得东风面，
万紫千红总是春。
（宋）朱熹：《春日》

伪球面的内蕴几何学可以作为罗巴切夫斯基的非欧平面几何学的解释，这件事提供了一个重要启示：在几何学中，被叫做“平面”的，不一定真正那么平坦；被叫做“直线”的，也不必处处象张紧的细线，没有弯曲。几何学离不开直观，但是这种直观允许打一些折扣。最要紧的是一种几何学必须反映现实世界的某些客观规律。至于这种几何学中的术语与它们所代表的概念之间，不必“形似”，只要“神似”就可以了。

例如，在平面直角坐标系中，平面上的一点可以用一对有序实数(x,y)表示。这里的点和平

面都是直观的几何图形，有序数对 (x,y) 仅仅作为用数表示形的一种方式．但是我们可以很快地发现，有序数对除去能表示点的位置而外，还可广泛应用于许多其它场合．因此可将原有几何术语的涵义加以引申，把一对有序实数 (x,y) 也叫做一个点，并将所有这些点的集合叫做一个二维空间，又称平面．这种引申意义下的平面已不再具有直观性，可利用坐标平面来直观地表示它．

这种“喧宾夺主”式的推广，在数学中是家常便饭．推广就是在更大的范围内寻找共性，因而可以使数学理论具有更大的普遍性，并且得到更广泛的应用．

类似地，空间的概念也可以推广．把任一有序三实数组 (x,y,z) 叫做一个点，所有这些点的集合叫做一个三维空间．普通空间中的点，可作为这种以数组为元素的三维空间的一种直观表示．

完全类似地，设 n 为任意正整数，考虑有序 n 实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，把它叫做一个点，记为X；所有这样的点X的集合叫做一个 n 维空间，记为 V_n．虽然当 $n>3$ 时不能象2维和3维那样对 V_n 作出简单的直观表示，但是可以把高维情形与2维、3维情形类比，间接地从直观获得

启发。在V_n中，含有一个参数的方程 $x_j=f_j(t)$，$j=1,\cdots,n$，被看成定义一条曲线；含两个参数的方程 $x_j=f_j(u,v)$，$j=1,\cdots,n$，则认为定义一个 2 维曲面；一个不含参数的方程 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$定义一个超曲面，即 $n-1$ 维曲面；两个这样的方程联列，则定义 $n-2$ 维曲面；其余类推。

这种推广的第一个明显得益者是代数。解二元一次方程组，可以看成求同一平面内若干直线的公共点；解三元一次方程组，可以看成求空间内若干平面的公共点。有了 n 维空间的概念以后，就可以说，关于含 n个未知数的线性方程组的研究，可以看成在n维空间中对于若干个超平面的公共点的研究。类似地，代数中关于二次型的一般研究，可看成 V_n 中关于二次超曲面的研究。虽说这样处理只不过是把代数语言转换成几何语言，但是我们从解析几何中已经深有体会，做一小步几何推理，往往相当于一长串解析演算。平面解析几何学不过是 2 维的，空间解析几何学也只是 3 维的，在n 维的情形下，解析演算与几何思考的繁简对比更为显著。冗长的解析演算把注意力引向运算技巧，但是具有无懈可击的严密性。从 2 维和 3 维情形的直观启示，通过类

比，产生一些关于高维情形的几何想法，简单而粗糙，廖廖数笔，虽无繁枝茂叶，却能对理论之树的基本骨架提供生动的一瞥。几何想法与解析演算的结合，可以大大加快研究进程，并能使复杂的理论变得易于了解。

n 维空间的引进，对于微积分学也有明显的益处。众所周知，一元函数的微积分学，与平面曲线的切线、弧长、曲边梯形的面积等等几何问题之间，有着不解之缘。二元函数和三元函数的微积分学，也有很多几何应用。当$n>3$时，n 元函数的微积分不再具有直观的几何解释。用 n元函数的微积分研究n 维空间的几何，那是再恰当不过了。

在研究三维空间的解析几何学和微分几何学时，向量是一种有力的工具。在研究n维空间的几何学时，向量仍能发挥重要作用，但是仅有向量已经不够，因而格拉斯曼引进了所谓“延量”，也就是现在所说的张量。

在三维空间中，需要研究兼有大小和方向的量时，总可以利用向量：如果这个方向是一维的（例如曲线的切线方向），就可用沿着这个方向的直线上的有向线段来表示；如果这个方向是2维的（例如曲面的切平面方向），则可用与这2

维平面方向垂直的直线上的有向线段表示。如果 **a** 和**b** 是平面M中的两个不共线的向量，那么向量积 **a**×**b** 是垂直于平面M的一个向量，利用向量 **a**×**b**就能表示平面M的方向。这里，**a**×**b** 的长度规定为等于以**a**、**b** 为两邻边的平行四边形的面积，**a**×**b** 的正方向规定为使**a**、**b**、**a**×**b**成右手系。

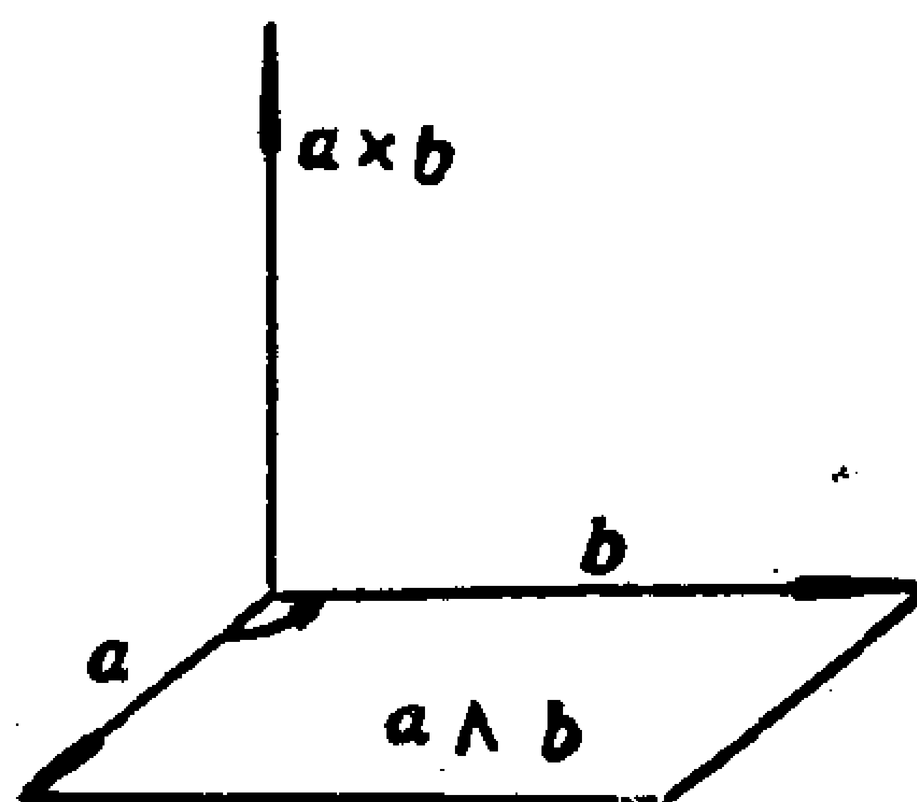


图 6—1 向量积与外积

为了便于推广到高维情形，把向量积**a**×**b** 换成另外一种积，记为**a**∧**b**，叫做外积。向量**a**与**b**的外积**a**∧**b**的大小规定为以**a**、**b** 为两邻边的平行四边形的有向面积，当 **a**与**b** 对调时，有向面积变号；外积**a**∧**b**的方向，规定为**a**和**b**所在平面的方向。**a**×**b**着眼于平面的垂线，而 **a**∧**b**着眼于平面自身。**a**×**b**的方向是一维的，而**a**∧**b**的方向是二维的；**a**×**b**仍是向量，而 **a**∧**b** 则已不是普通的向量，而是所谓 2 —向量。如果规定当两个向量共线时，其外积为零，那么外积**a**∧**b**在任意n 维空间中都有意义，而 **a**×**b** 却只有在 $n=3$ 时才有意义。

外积$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$也象向量积一样，满足反交换律：

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=-\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}.$$

当$n\geqslant3$时，还可考虑$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$与向量$\mathbf{c}$的外积，记为$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$。这是一个3—向量，它指明由$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$决定的3维平面的方向。在3维欧氏空间中，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$的大小，恰好等于以$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$为棱的平行六面体的有向体积，当$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$成右手系时其值为正，成左手系时其值为负。

类似地可以定义m个向量$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、…、$\mathbf{a}_m$的外积$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_m$，每交换其中任何两个因子的位置，外积都变号。

把普通的平面解析几何学和空间解析几何学中涉及向量积的地方都换成外积，然后把坐标从2个、3个推广到任意n个，仿照低维情形引进适当的定义，便可建立n维欧氏空间的几何学。

为了研究n维欧氏空间的微分几何学，还需考虑微分的外积。实际上，在大学的微积分课程中早已接触过微分的外积。试考虑二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，式中的$dx\ dy$是直角坐标系下$xOy$面内的面积元素。在把直角坐标$x$、$y$换成曲线坐标$u$、$v$时，设

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v)$$

那么不但被积函数 $f(x,y)$ 中的 x、y要用上面的关系式代入，而且面积元素 $dxdy$ 要换成曲线坐标下的面积元素 $Jdudv$，J 是雅可比行列式：

$$dxdy \longrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

在上式中，如果把$dxdy$写成外积 $dx \wedge dy$，同时把 $du\ dv$ 写成$du \wedge dv$，"$\longrightarrow$"就可换成等号。而如果把$dxdy$ 和 $dudv$ 看成普通的乘积，箭头两边却不相等。所以面积元素实际上是微分的外积，二重积分的恰切写法应该是

$$\iint_D f(x,y)\ dx \wedge dy$$

同理，曲面积分中的面积元素和三重积分中的体积元素也都是一些微分的外积。

外积是张量积的特殊情形，外积满足反交换律，而张量积则对交换因子顺序的结果没有限制。两个向量$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$的张量积记成 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$。由若干个向量作张量积，结果就得到张量。

n 维欧氏空间的几何学，是欧几里得几何体系的高维推广。能否把非欧几何学推广到高维情形呢？



图 6—2 黎曼

为了回答这个问题，需要把曲面的内蕴几何学推广成 n维弯曲空间的几何学。

n 维弯曲空间理论的创始人是德国数学家黎曼（1826～1866）．他把高斯研究曲面论的方法从两个曲纹坐标u、v推广到 n个曲纹坐标u_1、u_2、…、u_n，并且仿照曲面论中弧长元素的表达式，假定在 n维弯曲空间中成立

$$ds^2=\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\ du_j du_k$$

其中g_{jk}是u_1，…，u_n的函数，$g_{jk}=g_{kj}(j,k=1,\ \cdots,\ n)$。由此出发，可以建立$n$ 维弯曲空间的几何学，作为曲面内蕴几何学的高维推广，这样的弯曲空间，后来被称为黎曼空间。黎曼空间的几何学，叫做黎曼几何学。

设V_n是n维黎曼空间，P是V_n中任意一点，**a**和**b**是 V_n 中在P点处的两个不共线的向量。对于不同时为零的任意实数 λ和μ，作通过P点且在P点与向量 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 相切的测地线，所有这些测地线组成一个2 维黎曼空间 σ；按照曲面内蕴几

何学的方法，可确定 σ在P点的高斯曲率K。这样得到的量K，叫做空间V_n在点P沿着面素 $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 方向的黎曼曲率。黎曼空间的弯曲性，就是用黎曼曲率来度量的。

当 $n>2$ 时，一般说来，黎曼曲率不但依赖于点，而且依赖于一点处的面素方向。德国数学家舒尔（1856～1932）证明了一个重要定理：设$n>2$，如果黎曼空间V_n 在每一点的黎曼曲率K都与面素方向无关，那么V_n在各点的K值都相同。换句话说，在整个空间V_n上，黎曼曲率K是一个常数。这样的黎曼空间叫做常曲率空间。常曲率空间是常曲率曲面的高维推广。

黎曼是在1854年在哥廷根大学的任职演说中发表他的几何理论的，这篇演说的题目是《关于作为几何学基础的假设》。他在演说中很少写出什么数学式子，内容高度浓缩，听众中只有高斯完全理解他的工作。

在黎曼几何学中，正如在曲面的内蕴几何学中一样，ds^2的表达式是一切讨论的出发点，而不管这个表达式是怎样来的。这种情形，对低维黎曼空间的直观表示带来很大方便。

例如考虑2维的情形。2维的黎曼几何，就是曲面的内蕴几何。曲面虽然具有直观性，但是

只有当我们实际制作出某种曲面的模型，并且在模型表面准确地画出所需的曲面上的图形以后，这种直观性才能完全兑现。这样做太麻烦，通常都是在一张纸上画图。于是想到一种变通的办法：可以象绘制地图那样，用一个平面区域表示一个曲面，或者表示曲面上的一个区域。形象地说，就是绘制曲面的地图，用地图上的区域σ表示曲面上的区域Σ。如果曲面区域Σ的高斯曲率不恒为0，那么它与平面区域σ的对应就不是等距的，长度必然有所歪曲。区域σ中一条曲线C所代表的曲面弧长与从图面上量得的实际弧长一般不同；作为地图，应该以它所代表的曲面弧长为准。所以，在平面区域σ中，弧元应该采用曲面Σ的ds^2表达式。一种ds^2表达式叫做一个度量。用字母g表示一个度量。在区域σ中采用度量g所得到的几何，记为(σ,g)。区域σ是舞台，度量g是剧组，有了舞台和剧组，就能演戏了。

现在我们通过一个例子，来看看这种几何学的戏剧是如何表演的。这个例子把我们带进由高斯、罗巴切夫斯基和亚诺什.鲍耶发现的几何新领域，这种新几何由于否定欧几里得第五公设而导致许多新奇结论，曾使数学界的一代英豪为之困惑，高斯不敢发表，罗巴切夫斯基遭受攻击，亚

诺什·鲍耶颓唐沮丧。在现在这个例子里，将由在欧氏几何节目里经常露面的著名“演员”们表演非欧几何节目，因而我们能够完全理解，甚至感到有趣。不过，在好戏开场之前，先得花费一点时间，介绍几位出场的“演员”和它们扮演的角色。

在普通的欧几里得平面上，用极坐标 (r,θ) 表示点的位置。为了方便，允许极半径 r 取负值，这样就使方程 $\theta=\theta_0$ 能够表示一条通过极点O的直线，而不只是从O点引出的射线。把平面区域σ取为单位圆的内部，即

$$\sigma:\ |r|<1$$

在区域σ中，采用下面的度量：

$$g:\ ds^2=\frac{4R^2}{(1-r^2)^2}\ (dr^2+r^2d\theta^2)$$

其中R是一个常数，$R>0$。于是得到一种几何(σ,g)，简称为g-几何。在g-几何中的概念，都在前面加上“g-”的记号，例如g-点、g-弧长、g-测地线等，以区别于欧氏几何意义下的对应概念。“g-测地线”作为“g-直线”的同义语。

于是现在可以说：g-点就是单位圆内部的点，g-平面就是单位圆内部的圆域。

由此立刻产生一个疑问。在普通的欧氏几何

里，如果放眼全平面，那么每个点都不比其它点特殊，一点处的每个方向都不比其它方向特殊。但是如果局限在单位圆内部，情况就大不相同、圆心O是唯一的特殊点，整个圆域可以绕着它任意旋转。圆内其它各点，有些离O点较近，有些离O点较远。在O点处，确实看到每个方向都不比其它方向特殊，但在圆内其它任何其它一点，沿不同方向到单位圆周的距离都显得远近不同。由此产生的疑问是：在整个g-平面上，能否保证每个g-点都不比其它g-点特殊，任一g-点处的每个g-方向也不比其它g-方向特殊呢？

为了回答这个问题，需要考虑g-等距，即把区域σ仍变到σ，并且保持度规g 不变的点变换。在这里，利用复数表示形式特别方便。

平面上极坐标为(r,θ)的点可用复数表示成

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 i是虚数单位。点z 在单位圆内的充要条件是

$$z\bar{z}<1$$

利用复数，可将度量g 改写成

$$ds^2=\frac{4R^2}{(1-z\bar{z})^2}dzd\bar{z}$$

现在考虑变换

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \qquad (1)$$

其中α是任意实常数，z_0是复常数，满足条件

$$z_0\bar{z}_0<1$$

由此可得

$$w\bar{w}-1=\frac{1-z_0\bar{z}_0}{|1-\bar{z}_0 z|^2}(z\bar{z}-1)$$

因而若 $z\bar{z}<1$，则$w\bar{w}<1$；若 $z\bar{z}=1$，则$w\bar{w}=1$；若 $z\bar{z}>1$，则 $w\bar{w}>1$。所以变换（1）把单位圆变到单位圆，把单位圆的内部变到单位圆内部（把单位圆外部仍变到外部）。

进而，从（1）式计算微分dw，可验证

$$\frac{4R^2dwd\bar{w}}{(1-w\bar{w})^2}=\frac{4R^2dzd\bar{z}}{(1-z\bar{z})^2}$$

因而变换（1）保持度规 g 不变。这表明变换（1）就是g-等距。

在（1）式中，令$z=z_0$，得$w=0$，因而利用g-等距可将σ中任一点z_0变到O点位置。又设w_0是σ中任意一点，取$z_0=-e^{-i\alpha}w_0$，代入（1）式后，令$z=0$，就得到 $w=w_0$，因而可利用 g-等距将O

点变到σ中任意点 w_0。就这样，以O点为桥梁，可将σ中任一点z_0用g-等距变到σ 中任一其它点w_0。又把g-方向看成普通方向，那么由于O点处可利用旋转将任一方向变为其它任一方向，绕O旋转是$z_0=0$的等距，所以在σ中任一其它点w_0处也可通过g-等距将任一方向变到该点处任一其它方向。这样就得到

定理1　在g-平面中，可利用g-等距将任一g-点A及A处任一方向变到任一指定的g-点B及B处任一指定方向。

这个定理表明，在g-几何中，可以象普通的欧氏几何那样利用重合法，把图形从一个位置移到另一指定位置。

定理1还表明，在g-平面中，每个g-点都不比其它g-点特殊。这意味着在任何两个g-点处的高斯曲率都应该相等。现在我们来计算高斯曲率的值，对照线元的一般形式

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

可知在这里

$$u=r,\quad v=\theta \tag{2}$$

$$E=\frac{4R^2}{(1-r^2)^2},\quad F=0,\quad G=\frac{4R^2r^2}{(1-r^2)^2} \tag{3}$$

当$F=0$时，计算高斯曲率的公式是

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right]_v+\left[\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right]_u\right\}$$

把（2）式和（3）式代入，结果得到

$$K=-\frac{1}{R^2}$$

由于K是负常数，可知这里的 g- 几何是双曲几何。

由（3）式得到

$$E:F:G=1:0:r^2$$

而计算曲线交角的公式只与$E:F:G$有关，所以σ中任意两条相交曲线按度量 g算出的交角大小与按欧氏度量$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$ 算出的结果相同。这表明两条曲线的g-交角等于它们在普通意义下的交角。所以可将“g-交角”简称为交角。

下面求g-几何中的测地线。当 $F=0$ 时，测地线的微分方程是

$$d\tau=\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_v du-G_u dv)$$

$$\frac{du}{ds}=\frac{1}{\sqrt{E}}\cos\tau$$

$$\frac{dv}{ds}=\frac{1}{\sqrt{G}}\sin\tau$$

其中 τ是测地线与参数曲线 $v=$常数的夹角。以（2）式和（3）式代入，化简后得到

$$\theta''=\frac{r(r^2+1)}{r^2-1}\theta'^3-\frac{2}{r(1-r^2)}\theta'$$

其中撇号表示对 r的导数。当 $\theta'=0$时，得

$$\theta=a \qquad （4）$$

a为常数，这表示通过圆心O的直线。当$\theta'\neq0$时，把微分方程两边同除以θ'^3，便可积出，结果得到

$$r^2+1-Cr\sin(\theta-a)=0 \qquad （5）$$

其中C和a是常数。化成直角坐标方程，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-1 \qquad （6）$$

其中a、b是常数，满足 $a^2+b^2>1$。这表示不通过O点的圆，它的圆心 Q (a,b) 在单位圆的外面，并且半径等于Q点到单位圆的切线长。如图，设圆Q 与圆O 的交点是M和N，则 $QM\perp OM$，$QN\perp ON$。这表明圆Q与圆O 正交。总之，通过O点的g-直线是单位圆的直径，不通过O点的g-直线是与单位圆正交的圆弧。

两个g-点A、B之间的g-距离用记号$d(A,B)$

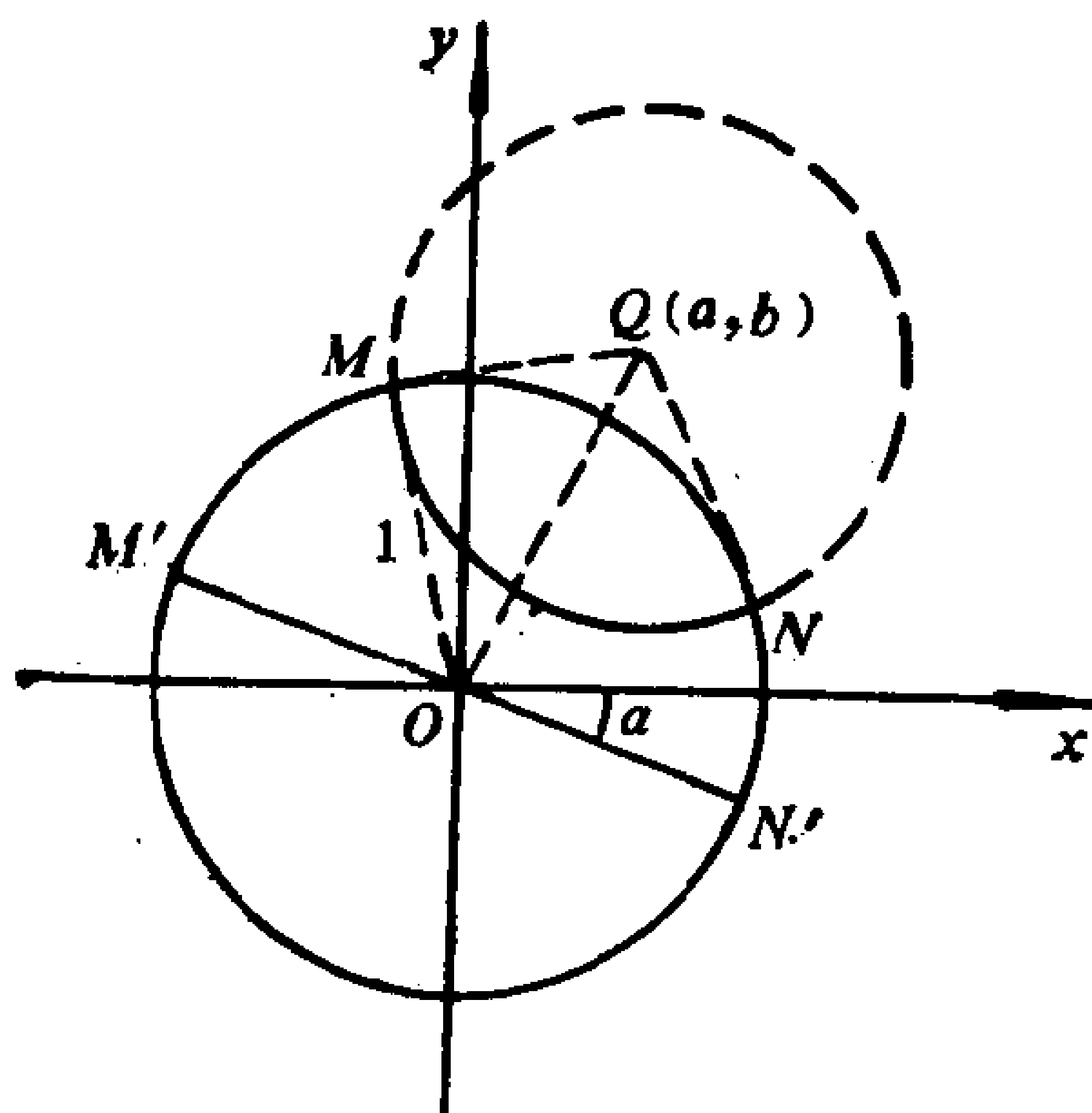


图 6—3 两种g-直线

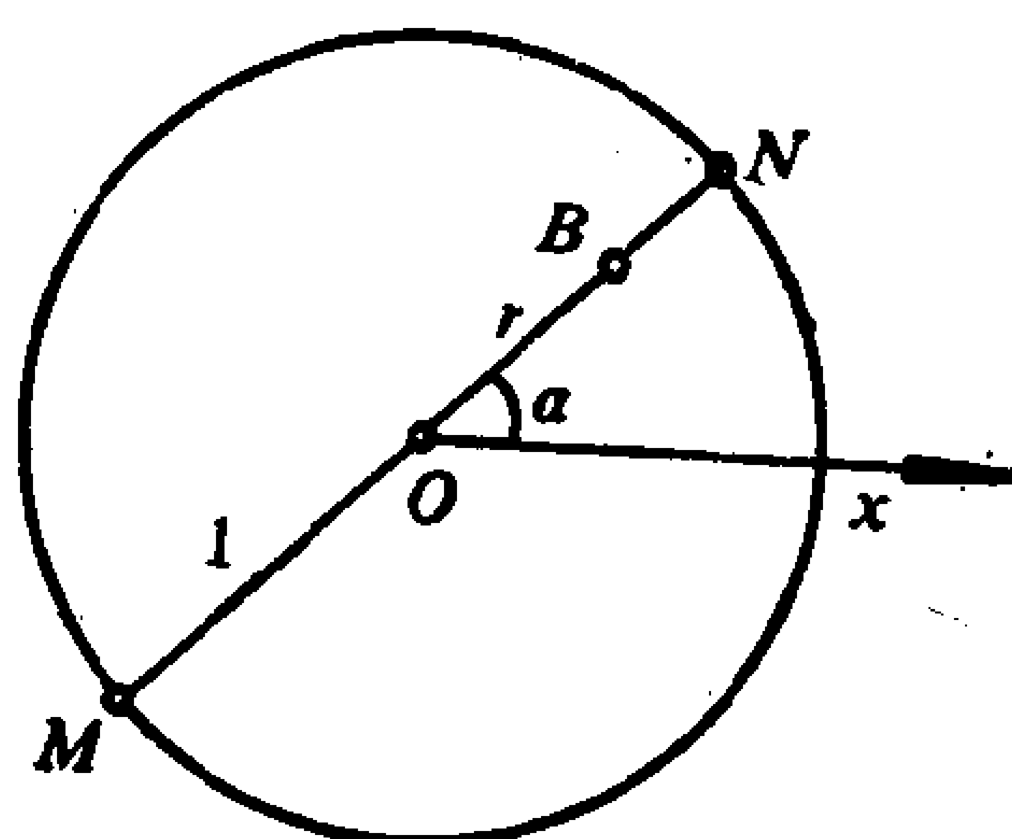


图 6—4 g-距离

表示．$d(A,B)$就是过A和B的g-直线在A与B之间的曲线弧的g-弧长．如果点A与单位圆的圆心O重合，点B的极坐标是 (r,α), $0<r<1$，则g-直线OB的极坐标方程是$\theta=\alpha$，因而

$$d(O,B)=\int_0^r \frac{2R}{1-r^2}dr = R\ln\frac{1+r}{1-r} \quad (7)$$

如上图，设g-直线OB交单位圆于M、N，则$OM=ON=1$，$MB=1+r$，$NB=1-r$，所以（7）式可写成

$$d(O,B)=R\ln\frac{MB\cdot NO}{MO\cdot NB} \quad (8)$$

（8）式右边的表达式$\frac{MB\cdot NO}{MO\cdot NB}$叫做四点$M$、$N$、$O$、$B$的交比。

可以证明，如果两点A、B都不在圆心O的位置，g-直线AB交单位圆于M和N，仍有

$$d(A;B)=R\ln\frac{MB\cdot NA}{MA\cdot NB} \quad (9)$$



图 6—5 庞加莱

上面导出的这些g-几何的概念与普通欧氏几何概念之间的关系，提供了一部辞典，可以用来把双曲几何学的概念和命题翻译成欧氏几何学的普通语言，因而易于理解。这种利用圆域作为双曲平面几何学

的解释的方法，是法国数学家庞加莱（1854～1912）发现的。他还发现一种利用半平面解释双曲平面几何学的方法，其中把平面区域σ取成上半平面$y>0$，而把度规取成

$$ds^2=\frac{R^2}{y^2}(dx^2+dy^2)$$

庞加莱还发现，利用圆域或半平面作出的双曲几何学的解释，与复变函数论中的自守函数有关。自守函数满足$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\equiv f(z)$，其中$a$、$b$、$c$、$d$是某些复数，满足$ad-bc\neq0$。这类函数是周期函数的一种推广。

现在我们利用上面关于圆域的g-几何学中一些基本概念的直观解释，来看看为什么在这种几何学中欧几里得第五公设不成立。

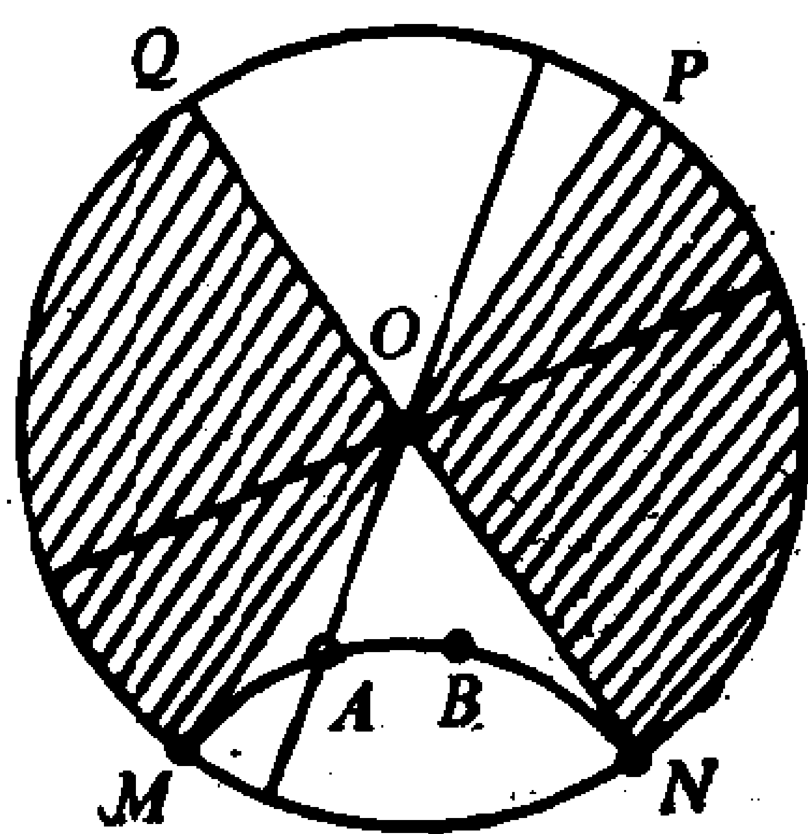


图 6—6 平行线

如图 6—6，设O是单位圆的圆心，g-直线AB不通过O点，并与单位圆交于点M、N，则$\widehat{MAN}$与圆O正交。过O点的直线，凡是位于图中画有斜线的一对对顶角内的都不与g-直线 AB

相交，它们叫做AB的分散线；位于另一双对顶角内的都与g-直线AB相交，叫做AB的相交线。由于M和N是单位圆周上的点，它们不属于g-平面，所以两直线OM、ON与g-直线AB也都没有公共点。两条g-直线OM和ON叫做g-直线AB的平行线。因为每个g-点都能利用g-等距转移到单位圆的圆心O，过O点的每条g-直线都是通常意义下的直线（位于单位圆内的部分），所以得到：

定理2 在g-平面内，过g-直线l外的任一g-点O有无穷多条不与l相交的g-直线。

推论 在g-几何中，欧几里得第五公设不成立。

可以把结果搞得更精确些。如图6—7，设l是平面内任一直线，O是这平面内不在l上的任意一点，$OH \perp l$，垂足为H，OH的长度为h。又设OP是同一平面内过O点的直线，$\angle HOP=\theta$。

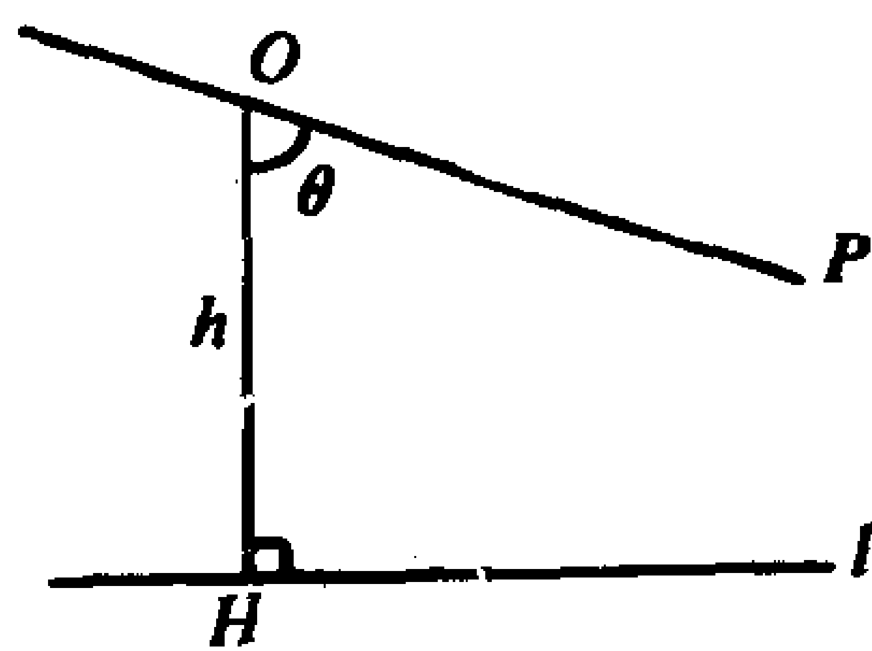


图6—7

如果欧几里得第五公设成立，那么只要$\theta<$

$\frac{\pi}{2}$，直线OP就一定与l相交。

但是罗巴切夫斯基证明了，在双曲几何学中，让θ从0开始，逐渐增大，当θ到达某一小于$\frac{\pi}{2}$的确定值θ_0时，直线OP就开始不与l相交。他把这个界限值θ_0叫做平行角，并且导出了平行角与垂线长h之间的关系。现在我们利用g-几何学，可以很容易地导出罗巴切夫斯基的这个结果。

如图6—8，设点O是单位圆的圆心，g-直线l不通过O点，因而是一条与圆O正交的圆弧$\overset{\frown}{MHN}$，设其圆心为Q.连QN、ON，由圆O与圆Q在点N正交，得$QN\perp ON$.连OQ，交$\overset{\frown}{MHN}$于H，则线段OH是g-直线l的垂线。设

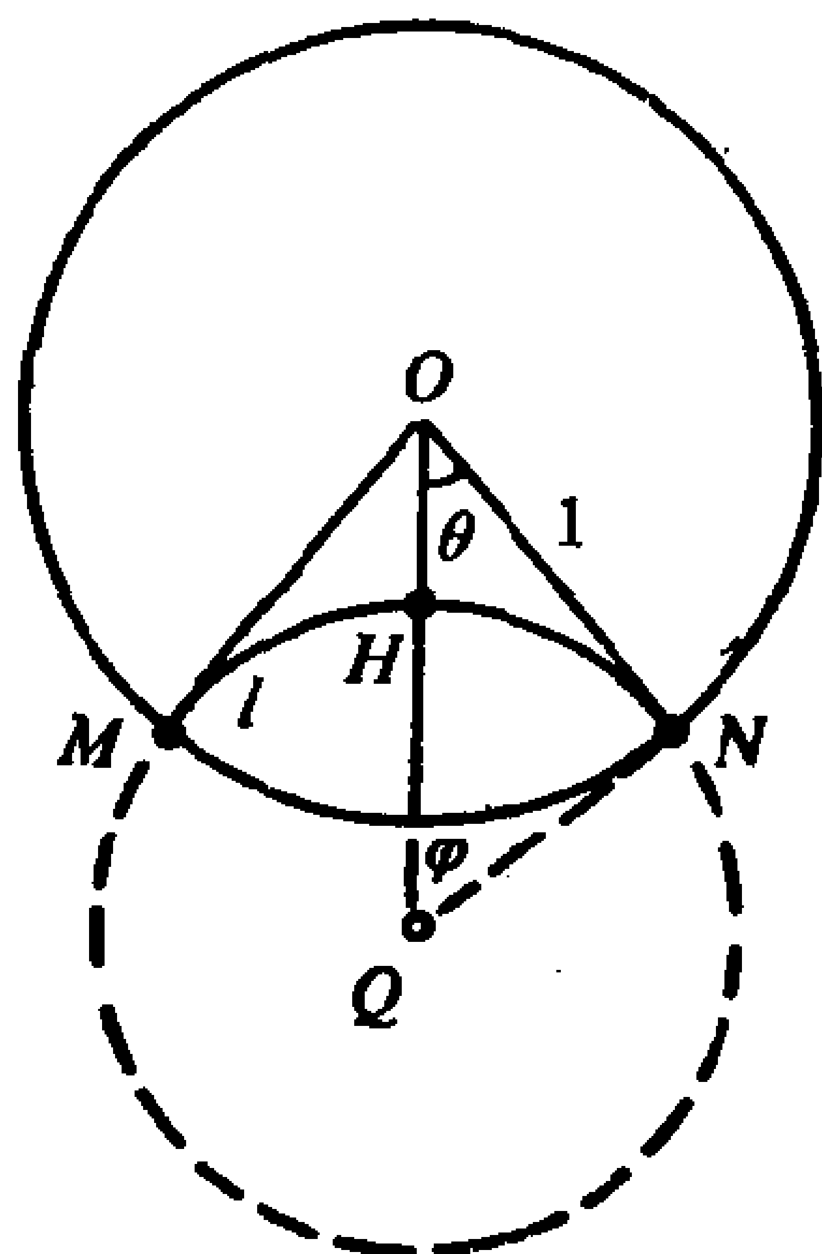


图 6—8 平行角

$$h=d(O,H),\quad \theta=\angle HON$$

则θ是平行角，要寻求θ与h之间的关系式。回忆g-距离的计算公式（7），得

$$h = R\ln\frac{1+OH}{1-OH}$$

由此解出OH，得

$$OH = \text{th}\frac{h}{2R} \tag{10}$$

另一方面，设$\angle OQH=\varphi$，从 $\triangle ONQ$得

$$OH = OQ - QH = \frac{1}{\sin\varphi} - \text{ctg}\varphi$$

$$= \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{tg}\frac{\varphi}{2}$$

与（10）式比较，得

$$\text{tg}\frac{\varphi}{2} = \text{th}\frac{h}{2R}$$

因而

$$\text{tg}\varphi = \frac{2\text{th}\frac{h}{2R}}{1-\text{th}^2\frac{h}{2R}}$$

$$= \frac{2\text{sh}\frac{h}{2R}\text{ch}\frac{h}{2R}}{\text{ch}^2\frac{h}{2R} - \text{sh}^2\frac{h}{2R}}$$

$$= \text{sh}\frac{h}{R}$$

再注意 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$，就得到所需的关系式

$$\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{sh}\frac{h}{R}$$

从上式知道，当$R\to\infty$时，$\theta\to\frac{\pi}{2}$。因而，当R很大，即高斯曲率$K=-\frac{1}{R^2}$与0相差很小时，θ近似等于$\frac{\pi}{2}$，这时欧几里得第五公设近似地成立。

现在考察g-三角形的内角和。

如图6—9，g-三角形OBC的三边分别是线段OB、OC和圆Q的弧$\overset{\frown}{BC}$. 过点B、C分别作圆Q的切线，交于点T. 记

$$\alpha=\angle BOC$$

$$\beta=\angle OBT$$

$$\gamma=\angle OCT$$

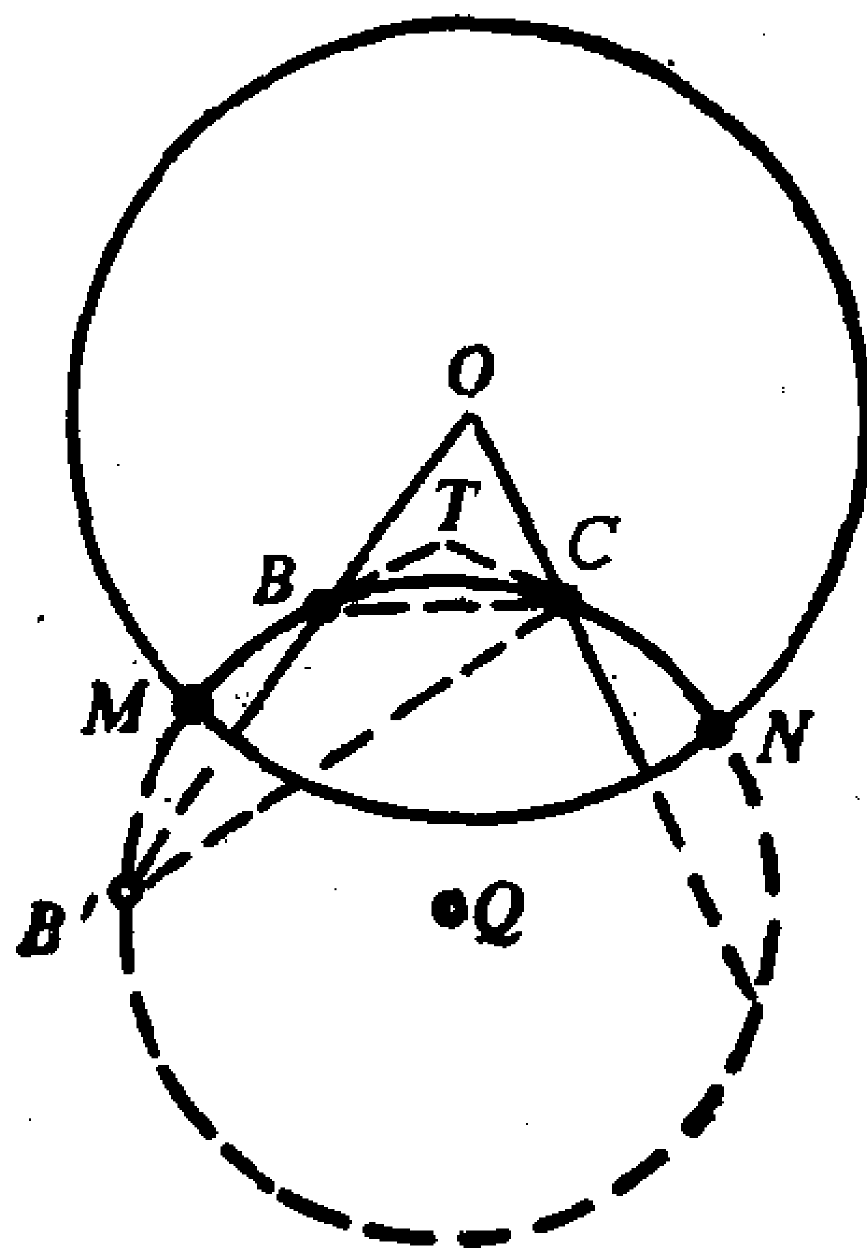


图 6—9 内角和

则α、β、γ是g-三角形OBC的三个内角. 连BC，得

$$\alpha+\beta+\gamma<\alpha+\angle OBC+\angle OCB$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma<\pi$$

从图 6—9 还可发现一些有价值的事实。延长OB，交圆Q于B'；连$B'C$。记

$$\delta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$$

则有

$$\angle TBC=\angle TCB=\frac{\delta}{2}$$

由此推出

$$\angle OBC=\beta+\frac{\delta}{2},\ \angle OCB=\gamma+\frac{\delta}{2}$$

$$\angle OB'C=\frac{\delta}{2},\quad \angle BCB'=\beta$$

这样一来，$\triangle OBC$和$\triangle OB'C$的各个角都可以用g-三角形的内角α、β、γ和角欠δ简单地表示出来。$\triangle OBC$和$\triangle OB'C$都是普通的平面三角形，它们的边与角之间应该满足通常的正弦定理、余弦定理等平面三角公式。如果能再把$\triangle OBC$和$\triangle OB'C$的各边用g-三角形的边表示出来，就可以从$\triangle OBC$和$\triangle OB'C$的边角关系导出g-三角形的边角关系了。

为此，设

$$a=d(B,C),\ b=d(O,C),\ c=d(O,B)$$

需要把图 6—9 中的线段OB、OC、OB'、BC、$B'C$都用a、b、c表示出来。

首先，利用g-距离的计算公式（7），得

$$c=d(O,B)=R\ln\frac{1+OB}{1-OB}$$

$$b=d(O,C)=R\ln\frac{1+OC}{1-OC}$$

由此解出OB、OC，得

$$OB=\operatorname{th}\frac{c}{2R},\quad OC=\operatorname{th}\frac{b}{2R} \qquad (11)$$

其次，由于O点到圆Q的切线长等于单位圆半径，由切割线定理得 $OB'\cdot OB=1$。以（11）式代入，得

$$OB'=\operatorname{cth}\frac{c}{2R} \qquad (12)$$

现在求BC的表达式。为了简化计算，利用复数表示点的位置。设点O、B、C分别对应于复数0、z_1、z_2，则

$$|z_1|=OB=\operatorname{th}\frac{c}{2R},\ |z_2|=OC=\operatorname{th}\frac{b}{2R}$$

在g-等距的一般公式（1）中，取 $a=0$，$z_0=z_1$，成为

$$w=\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$$

它把点$B(z=z_1)$变到点$O(w=0)$，把点$C(z=z_2)$

变到点$W\left(w=\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right)$。因为变换是$g$-等距，

所以

$$d(O,W)=d(B,C)=a$$

所以

$$\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|=OW=\operatorname{th}\frac{a}{2R} \qquad (13)$$

此外，容易验证下面的恒等式：

$$(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$$
$$=|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_2-z_1|^2$$

利用上面这些结果，得到

$$BC=|z_2-z_1|$$

$$=|z_2-z_1|\cdot\frac{\sqrt{1-|z_1|^2}\cdot\sqrt{1-|z_2|^2}}{\sqrt{|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_2-z_1|^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-|z_1|^2}\cdot\sqrt{1-|z_2|^2}}{\sqrt{\left|\dfrac{1-\bar{z}_1 z_2}{z_2-z_1}\right|^2-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\dfrac{c}{2R}}\cdot\sqrt{1-\operatorname{th}^2\dfrac{b}{2R}}}{\sqrt{\operatorname{cth}^2\dfrac{a}{2R}-1}}$$

化简得

$$BC=\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{2R}}{\operatorname{ch}\frac{b}{2R}\ \operatorname{ch}\frac{c}{2R}} \qquad (14)$$

最后计算$B'C$．由B'对应的复数为$\frac{1}{\bar{z}_1}$，得

$$B'C=\left|z_2-\frac{1}{\bar{z}_1}\right|=\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|}{|\bar{z}_1|}$$

$$=\frac{|z_2-z_1|}{|z_1|}\cdot\left|\frac{1-\bar{z}_1 z_2}{z_2-z_1}\right|$$

$$=\frac{BC}{OB}\cdot\frac{1}{OW}$$

将等式（12）、（13）、（14）代入，化简得

$$B'C=\frac{\operatorname{ch}\frac{a}{2R}}{\operatorname{ch}\frac{b}{2R}\ \operatorname{sh}\frac{c}{2R}} \qquad (15)$$

把得到的各有关线段和角的表示式填入图6—9，然后擦去多余线条，得到图6—10。这是一个非常有用的算图．图中共有三个普通的三角形：$\triangle OBC$、$\triangle OB'C$、$\triangle BB'C$．对于图中不同

的三角形，以及一个三角形的不同的边和角，应用通常的平面三角公式，再把公式涉及的线段和角用图中标注的量代入，化简后，就得到双曲几何学中的一些三角公式。通过字母轮换，可以得到更多的双曲几何学中的公式。

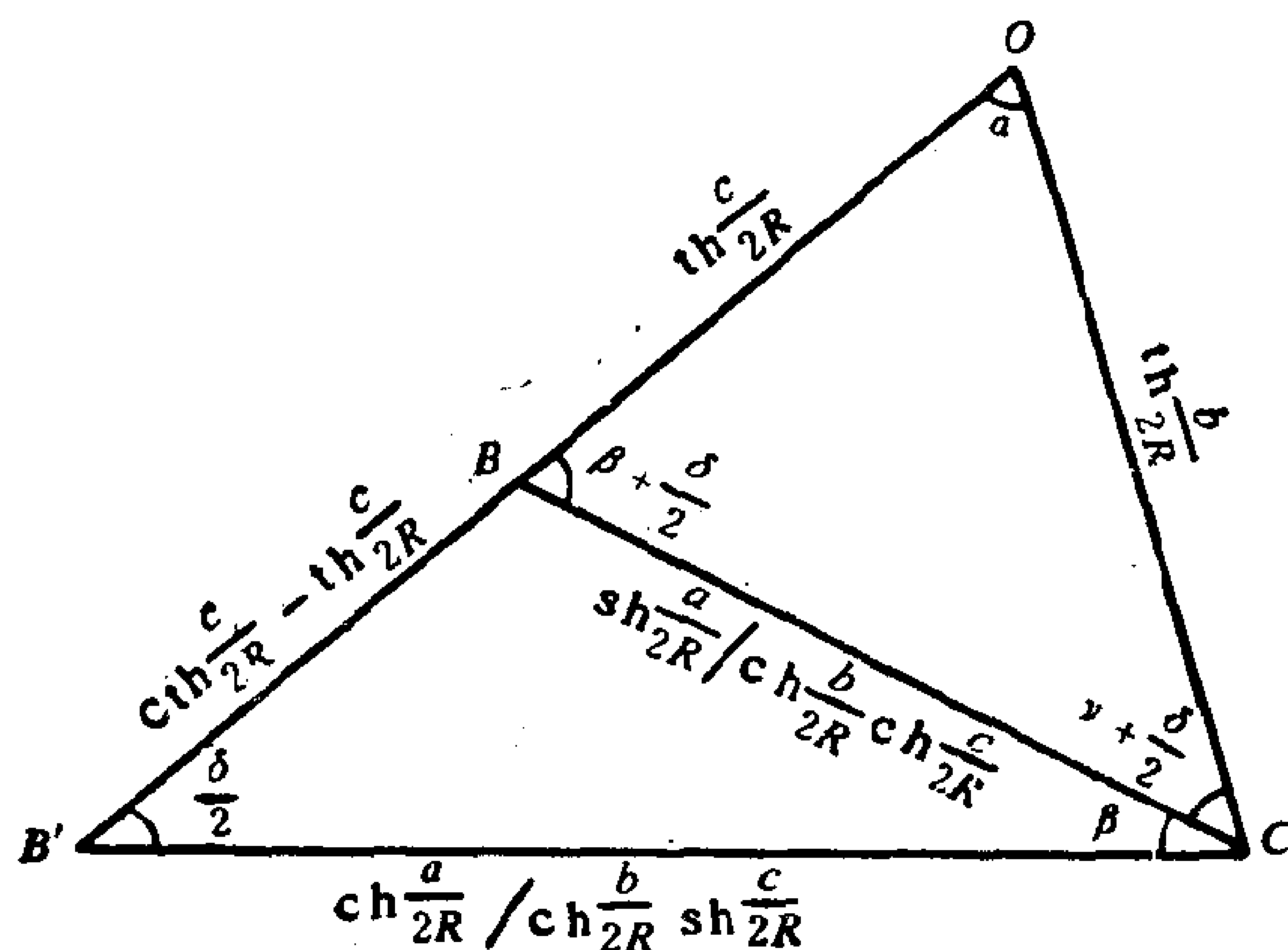


图 6—10 算 图

例如，从算图中的$\triangle BCB'$，对$\angle B'$和$\angle C$应用正弦定理，以图中标注的量代入后，得

$$\frac{\operatorname{cth}\dfrac{c}{2R}-\operatorname{th}\dfrac{c}{2R}}{\sin\beta}=\frac{\operatorname{sh}\dfrac{a}{2R}}{\operatorname{ch}\dfrac{b}{2R}\ \operatorname{ch}\dfrac{c}{2R}\cdot\sin\dfrac{\delta}{2}}$$

化简，得

$$\frac{\mathrm{sh}\frac{b}{R}}{\sin\beta}=\frac{2\mathrm{sh}\frac{a}{2R}\mathrm{sh}\frac{b}{2R}\mathrm{sh}\frac{c}{2R}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

由此将字母轮换，得到

$$\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{R}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{sh}\frac{b}{R}}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{sh}\frac{c}{R}}{\sin\gamma}$$

$$=\frac{2\mathrm{sh}\frac{a}{2R}\mathrm{sh}\frac{b}{2R}\mathrm{sh}\frac{c}{2R}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

这是双曲几何学中的正弦定理.

又如，从算图中的$\triangle OBC$，对于$\angle O$应用余弦定理，将图中标注的有关量代入，化简得

$$\mathrm{ch}\frac{a}{R}=\mathrm{ch}\frac{b}{R}\ \mathrm{ch}\frac{c}{R}$$

$$-\mathrm{sh}\frac{b}{R}\mathrm{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha$$

这是双曲几何学中的余弦定理。

上面利用圆域中的负常曲率度量，浏览了双曲平面几何学的一些重要结论。如果把单位圆内部换成单位球面内部，二维负常曲率度量换成三

维负常曲率度量

$$ds^2 = \frac{4R^2}{(1-r^2)^2}(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

那么所得到的三维黎曼几何将是双曲空间的立体几何学和微分几何学。

同一区域可以配备不同的 ds^2 表达式，如果借助物理的类比，就会觉得很容易理解。我们可以设想，用一种线膨胀系数很大的金属，制成一把很短的尺，可以用来在空间各点测量很小的长度ds。这时，如果区域σ 中各点的温度差别十分显著，那么在σ 中不同位置处，由于热胀冷缩，短尺的长度将发生变化。因而在各点处量得的长度值ds将有不同程度的歪曲。区域σ 中的每一种温度分布状况都导致一个ds^2 表达式，不同的温度分布状况导致不同的ds^2 表达式。

现在我们转向几何学观念的另一推广途径，看看射影几何方面的发展情况。

射影几何学研究的最初动力，是为了对绘画提供帮助。画家们为了使他们的作品富有立体感，必须研究透视学。下面一幅铜版画是德国画家丢勒（1471～1528）的作品，生动地记载了中世纪的画家怎样研究透视。“透视”（perspective)这个名词，是从拉丁文 perspecto（透过…



图 6—11 中世纪画家怎样研究透视

看去）译过来的。当初研究透视，是采取一个透明的平面迎在眼睛的正前方，透过这平面去看景物，把看到的样子毫不错位地描画在这个平面上，就得到了该景物的透视图。从数学上看，这就需要研究物体在中心射影之下有哪些性质保持不变。

自学成名的法国数学家笛沙格（1591～1661）通过研究透视法，开创了射影几何学的研究。

绘画中常用的透视法基本规律有三条：

1. 平行直线消失于一点。就是说，当一组平行直线向远处延伸时，应该画成延长后交于一点。这一点叫做消点，又叫灭点。

2. 近大远小。就是说，同样大小的东西，在近处看显得大，在远处看显得小。这条规律是与前面一条规律联系在一起的。

3. 平面消失到一条直线上。就是说，在一个不与视线垂直的平面上，越往远去，图形显得越小，直至最后消失为一点，所有这些消失点应该画在同一条直线上，这条直线叫做消线，又叫灭线。例如，要画一望无际的滔滔水面，在画面上总是在天与水之间画一条分界的直线，这条直线就是水面的消线。

与这些透视规律相对应，笛沙格在每条直线上添进一个新的点，叫做无穷远点；在每个平面上添进一条新的直线，叫做无穷远线。他假定每条直线上有且只有一个无穷远点，一组平行直线有公共的无穷远点；每个平面上有且只有一条无穷远线，一组平行平面有公共的无穷远线。在中心射影之下，无穷远点可以投射成普通点，具体表现为对应的一组平行直线投射成相交直线；普通点也可以投射成无穷远点，具体表现为相交直线在特殊情形下可以投射成平行直线。因此，通过这样引进无穷远元素以后，平行线与相交线之间的差别不见了，平面上任何两条直线都有且只有一个公共点。同样地，空间中任何两个平面都有

且只有一条公共直线。

引进这样的无穷远元素后，带来很多方便。例如，产生了非常有用的对偶原则。在一个关于射影平面上的图形的命题中，把点换成直线，直线换成点，点在直线上换成直线过点，直线过点换成点在直线上，点的轨迹换成直线族的包络，直线族的包络换成点的轨迹，这样得到的新命题，叫做原来命题的对偶命题。对偶原理断言：若原命题正确，则其对偶命题也正确。例如，考虑命题：任给两点，则必有且仅有一直线同时通过这两点。它的对偶命题是：任给共面二直线，则必有且只有一点同时在这两条直线上。在射影平面上，这两个互相对偶的命题都是对的。

笛沙格把欧氏平面和欧氏空间改造成射影平面和影射空间，为射影几何学的发展打下了基础。但是这件工作却与欧几里得的平行理论大唱反调。在欧几里得的平行理论中，在一平面内，过已知直线外一点有一条且只有一条与它不相交的直线。由高斯、罗巴切夫斯基和亚诺什·鲍耶发现的双曲几何学断言这样的直线有无穷多条，而由笛沙格创始的射影几何学却断言这样的直线连一条也没有。双曲几何学在 1826 年才公开发表，结果激起一场轩然大波；笛沙格早在1636年

就出版了一本关于透视法的小册子，1639年出版了他的主要著作《试论锥面截一平面所得结果的初稿》，结果却能安然无恙．假定同一平面内任何两条直线都相交，虽然不与欧几里得第五公设直接抵触，却与《几何原本》中的另外一些公设和公理不相容。但是人们却能接受射影几何学，并且乐于发展射影几何学，因为确实看到它很有用。

通常的直角坐标系只能表示普通点，不能表示无穷远点．怎样把坐标系加以适当改造，使它也能用来表示无穷远点呢？

首先考虑一条射影直线的情形。

如果l是一条普通直线，那么只要把l看成一个数轴，就可将l上的每一点用一个实数k表示。直线l上对应于实数k的点，记为P_k。

现在设l是一条射影直线，P_∞是l上的无穷远点。因为引进无穷远点是与中心射影有关的，所以可将l取为坐标平面上的直线$y=1$，并将坐标原点O取为射影中心，考察通过O点和l上任一点的直线。

如图6—12，直线l上的普通点P_k，现在具有坐标$(k,1)$；直线OP_k的方程可写成$x=ky$，直线OP_k被单位圆截得的线段是一条直径$A'_k A_k$。令

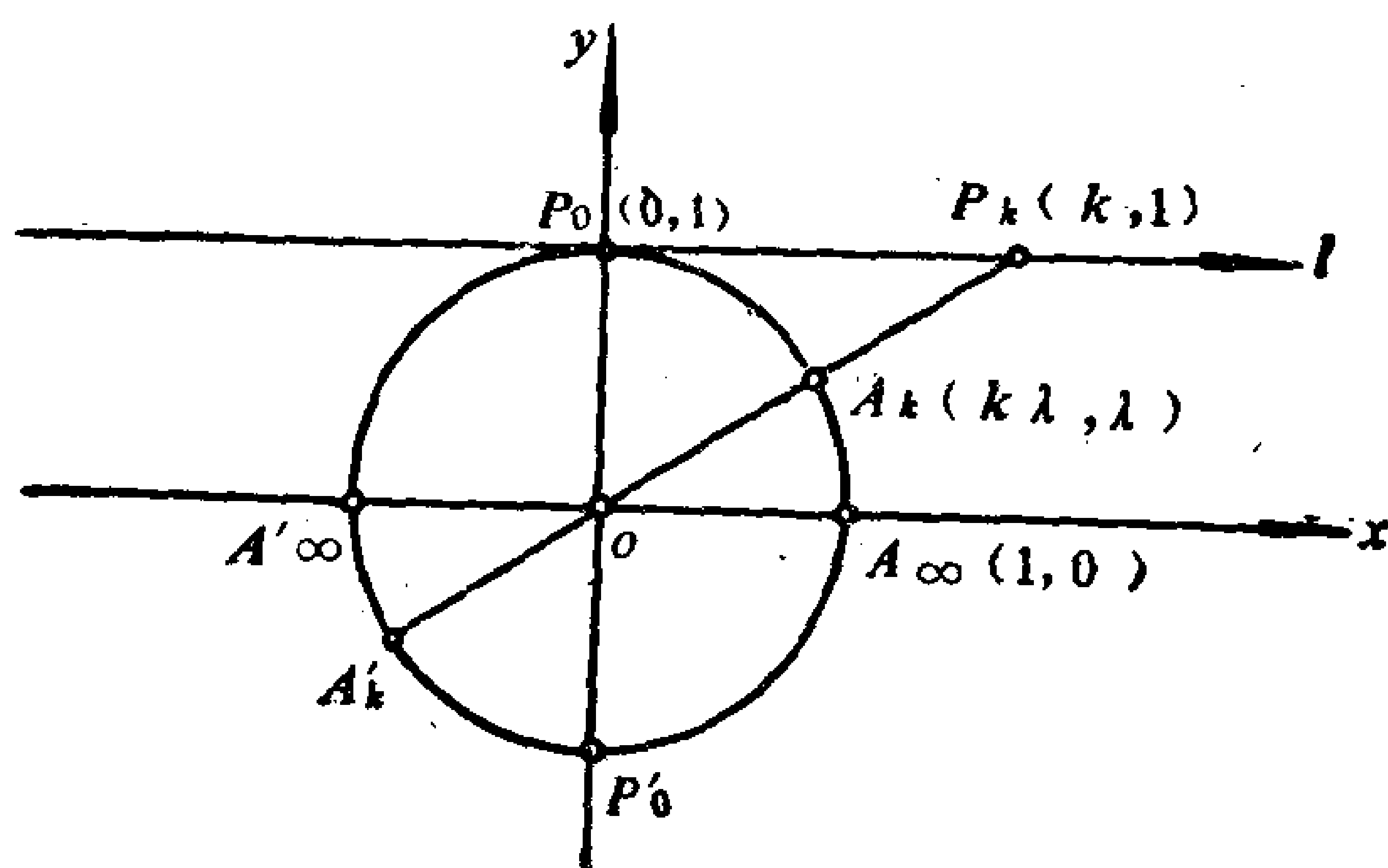


图 6—12 无穷远点的表示

$k \to +\infty$而取极限，则 A'_kA_k 将落到x轴上，成为图 6 —12中的直径$A'_\infty A_\infty$，它对应于l 上的无穷远点 P_∞。又若令 $k \to -\infty$ 而取极限，则 A'_kA_k仍将落到x轴上，这表明沿l 向相反方向无限远离时，仍趋于同一个无穷远点 P_∞。

总之，射影直线l 上任一点P可用单位圆的一条直径$A'A$表示，当P是无穷远点时 $A'A \parallel l$，P不是无穷远点时$A'A$ 与l 交于点P。无穷远点是假想的，单位圆中平行于 l 的直径却是实在的。所以，要问怎样确定P点在 l 上的位置，只需考虑怎样确定直径$A'A$的位置。直线$A'A$通过坐标原点O，它上面除 O 而外各点的对应坐标都成比例。所以可用直线$A'A$上异于O的任一点

(x_1, x_2)的两坐标之比$x_1:x_2$来确定点P在l上的位置。这样就导致点的齐次坐标的概念。

把欧氏直线l看成数轴，l上任一点P所对应的实数x可取为点P的一种坐标，叫做非齐次坐标。现在令

$$x_2 \neq 0, \qquad x_1 = x_2 x$$

其中x_2可任意选取，只要不为零，这样得到的有序数组(x_1, x_2)叫做点P的齐次坐标。若(x_1, x_2)是P点的齐次坐标，$\rho \neq 0$，则数组$(\rho x_1, \rho x_2)$也是P点的齐次坐标。

现在在l上添进无穷远点P_∞，把它扩充成射影直线，并且规定P_∞的齐次坐标是$(x_1, 0)$，其中$x_1 \neq 0$。

这样一来，无论是l上的普通点或无穷远点，都可用齐次坐标表示成(x_1, x_2)，其中x_1和x_2不同时为0，并且对于$\rho \neq 0$，$(\rho x_1, \rho x_2)$与(x_1, x_2)表示同一点。当$x_2 \neq 0$时为普通点，其非齐次坐标为$x = \dfrac{x_1}{x_2}$，当$x_2 = 0$时为无穷远点，它没有非齐次坐标。

类似地可在射影平面上引进齐次坐标。先考虑欧氏平面上的任意点P，设它的直角坐标是(x, y)，称它为P点的非齐次坐标。令

$$x_3 \neq 0, \quad x_1 = x_3 x, \quad x_2 = x_3 y$$

其中x_3可任意选取，只要不为零。有序数组(x_1, x_2, x_3)称为点P的齐次坐标。然后在平面上添进无穷远点，规定它们的齐次坐标是$(x_1, x_2, 0)$，其中x_1和x_2不同时为0，并且对于$\rho \neq 0$，数组$(\rho x_1, \rho x_2, 0)$与$(x_1, x_2, 0)$表示同一个无穷远点。

欧氏平面上直线的方程是

$$Ax + By + C = 0$$

两边同乘以x_3，化为

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

其中A、B、C不全为0．这就是射影平面上直线方程的一般形式。如果无穷远点P_∞的齐次坐标$(x_1, x_2, 0)$满足上述一次齐次方程，就说无穷远点P_∞在这条直线上。无穷远线的方程是$x_3 = 0$。

完全类似地，可以在n维欧氏空间中添进无穷远元素，使它成为n维射影空间，并在其中引进齐次坐标。n维射影空间中一点的齐次坐标是$n+1$个数所成的有序组$(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$，这些数不全为零，并且如果用任一不为0的数$\rho$去乘它们，得到的数组$(\rho x_1, \rho x_2, \cdots, \rho x_{n+1})$仍表示同一点。无穷远点由条件$x_{n+1} = 0$确定。还可考虑坐标为虚数的点，称它们为虚点。

2 维的情形搞清楚了，n维（$n>2$）的情形就可仿照处理。所以下面只考虑 2 维情形。

两个射影平面之间的点的一个一一对应，如果把共线点仍变到共线点，就叫做一个射影对应。中心射影是射影对应的特例。从一个射影平面到它自已的射影对应叫做射影变换。平面射影变换的一般形式是

$$\rho x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3$$
$$\rho x_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3$$
$$\rho x_3' = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3$$

其中的（x_1，x_2，x_3）和（x_1'，x_2'，x_3'）分别是变换前的变换后的点的齐次坐标，系数行列式$|A_{jk}|\neq 0$，$\rho\neq 0$。

顺次施行两个变换S_1和S_2的结果，仍是一个变换，称为变换S_1和S_2的乘积。使每个点都不改变位置的变换叫做恒等变换。如果顺次施行两个变换的结果得到恒等变换，就说后一个变换是前一个变换的逆变换。从点集M到它自己的一些变换所成的集合Σ，如果包含其中每两个变换的乘积，包含恒等变换，而且包含其中每个变换的逆变换，就说Σ是一个变换群。

n 维射影空间的全体射影变换组成一个变换群，叫做射影群。射影几何学研究在射影变换下

保持不变的那些性质。

把每个无穷远点仍变到无穷远点的射影变换叫做仿射变换。仿射变换也构成一个变换群，叫做仿射群。关于在仿射变换下保持不变的几何性质的研究，也构成一个几何分支，叫做仿射几何学。平行射影可看成从一个平面到另一个平面的一种特殊的仿射对应。关于平行射影的性质的内容的研究，属于仿射几何学的一部分。

如果从一个变换群G中选取一部分变换构成集合H，使得H仍是一个变换群，就说H是G的子群。仿射群就是射影群的一个子群。

粗略地说，一个变换群就是一个整套变换。一个变换群的子群，就是从一大套变换里挑选出来的一小套变换。在变换群G的所有变换下都保持不变的一般性质，在子群H下也都不变；但是反过来却不行，子群H有它自己的特点，它与G相比，能够保持更多的性质不变。例如，在仿射几何中可以研究平行性，平行性在仿射群下保持不变，在射影群下却不再保持。

欧几里得几何研究图形的形状、大小和相关位置。保持这些性质的变换，是旋转、平移、轴对称和中心对称等刚体运动和相似变换。所有这些变换和它们的乘积也组成一个变换群，叫做运

动群。运动群是仿射群的子群。欧氏几何是研究运动群下不变性质的几何分支。

运动群也是射影群的子群。因此，可以扩大到射影几何范围内，从射影角度重新认识欧氏几何。欧氏几何中有长度和角度概念，这些量在射影变换下一般都要发生改变。法国数学家拉盖尔（1834～1886）研究角度在射影变换下怎样变化，结果在1853年发现用虚圆点定义角的方法。所谓虚圆点，是在射影平面上具有齐次坐标(1，i，0)和（1，$-i$，0)的两个无穷远虚点，它们满足圆周的齐次方程

$$x_1^2+x_2^2-r^2+x_3^2=0$$

同样在1853年，英国数学家凯莱（1821～1895）独立地把这方面研究向前推进了一大步。他用一条任意的二次曲线代替虚圆点，把这条特定二次曲线称为绝对形，利用它来定义长度和角度的度量。推广到空间，则用一个任意的二次曲面作为绝对形。

德国数学家菲利克斯·克莱因(1849～1925)接受了凯莱的思想，并加以发展，使得在射影几何学框架中也能研究非欧几何，他证明了，当绝对形是非退化实图形时，得到负常曲率的几何；绝对形是非退化虚图形时，得到正常曲率的几

何；而当绝对形退化为一对重合直线时，则得到欧氏几何。根据这些情况，他把负的常曲率几何称为双曲几何，正的常曲率几何称为椭圆几何，欧氏几何称为抛物几何。采用这些术语的原因，是因为考虑到下面的类比：双曲线、椭圆、抛物线与无穷远线的实交点的个数分别是2、0、1；而当绝对形是非退化实二次曲线、非退化虚二次曲线和退化为一对重合直线时，它们与一直线的实交点的个数也分别是2、0、1。



图 6—13 菲利克斯·克莱因

就这样，菲利克斯·克莱因从另一途径再次证明了，确实存在着使欧几里得第五公设不成立的几何。

菲利克斯·克莱因的最著名的工作，是他在一篇被称为“爱尔朗根纲要”的演讲中提出的几何观点。“爱尔朗根纲要”的全名是《关于现代几何学研究的比较考察——1872年在爱尔朗根大学评论会及哲学院开学典礼上提出的纲要》。在这

篇演讲中，他不但考虑普通的空间，也考虑抽象的多维流形。通过对当时已经发展起来的各种各样的几何学加以比较和考察，菲利克斯·克莱因指出，作为几何学的推广，可提出下面的一般性问题：给了一个流形和这个流形的一个变换群，建立关于这个群的不变性理论。

十年以前，在国内的数学界，只要提起克莱因这个姓，人们立刻会想起把几何学与变换群联系在一起的著名论点。但是近来人们逐渐熟悉另一位克莱因，因为在1979年至1981年间，当代的数学史家莫里斯·克莱因的《古今数学思想》中译本1～4卷陆续出版，引起了很多人的兴趣。虽然前者的姓是Klein，后者的姓是Kline，译成中文却只字不差。为了将两位克莱因互相区别，我们在提到他们的姓时，同时也写出他们的名字菲利克斯或莫里斯，希望不致引起混淆。

菲利克斯·克莱因的“爱尔朗根纲要”不但是里程碑，也是一个转折点。在十九世纪的最后三十年里，数学家们认识到，几何学大厦固然有可能继续向高层发展，然而当务之急却是突击加固它的根基。通过对欧几里得第五公设的研究，暴露出欧几里得《几何原本》中的漏洞实在是太多、太大了。

七 公理方法



草枯鹰眼疾，
雪尽马蹄轻。
（唐）王维：《观猎》

德国哲学家叔本华（1788～1860）在1844年说，他感到很奇怪，数学家们攻击欧儿里得的平行公设，而不去攻击“彼此重合的量相等”这一条公理．叔本华认为，重合的图形自然是恒等的或相等的，因而无需什么公理．况且，这条公理预先假设了图形的可移动性，但是能在空间中移动的是物质，因而超出了几何的范围．哲学的着眼点与数学的着眼点有所不同，数学家们未必完全赞成叔本华提出批评的理由，但是对于他批评的这件事，却早已注意到了．早在十六世纪，数学界就已有人批评了欧几里得用重合法证明有关全等的定理。

在《几何原本》的公理表中，专门批评第五公设，确实太不公平。其它公设、公理并不都是无懈可击的。除去"彼此重合的量相等"也受到批评而外，第四条公设"所有直角彼此相等"也成为怀疑的对象，有人认为它应该也能证明出来。

另一种批评意见正好相反，认为《几何原本》的公理表似乎不大够用，还应该更加完备起来。

例如，在第二节中，我们介绍了《几何原本》中第一卷命题一的全部解答过程。如果以严格的眼光重新审查这个解答过程，就会发现，其中所用到的论据，除去《几何原本》里已列出的定义、公理和公设而外，还包含其它的基本假定。命题1的内容是：以一已知线段为一边，作等边三角形。作法要点是：设已知线段为 AB；以 A 为圆心、AB 为半径作圆；以 B 为圆心、BA 为半径作圆；两圆交于点 C，连 CA、CB，则 $\triangle ABC$ 即为所求。在这个作法中，画圆有公设3作依据，连直线有公设1作依据，但是为什么两圆一定相交呢？在这里，默认了圆是连续不断的，要想从圆内突破圆圈的包围而到达圆外，必定碰上圆周，决无空隙可钻。对于平面几何学来说，直线和圆的连续性是至关重要的基本性质，

哪怕它们上面只有一些极其微小的缺口，就象画家用豪放的笔法画出的断断续续的线条那样，涉及相交的一切定理就都必须重新检查。遗憾的是，在《几何原本》里并没有列出关于连续性的任何公理。

《几何原本》第一卷命题1的证明中缺少关于连续性的公理作依据，是莱布尼兹(1646～1716)指出的。

《几何原本》中的定义也不是完美无缺的。“点是没有部分的那种东西”，什么叫做“部分”？“直线是同它自己上面各点看齐的线”，什么叫做“看齐”？如果这里的“部分”和“看齐”是数学概念，那么它们本身的确切含义又是什么？如果它们是物理概念，那么，用物理概念来给数学概念下定义，这种定义本身就包含着一种混乱。

其实，从古希腊时代开始，就经常有人批评《几何原本》有各种各样的逻辑缺陷。长期以来，人们对《几何原本》的批评主要集中在第五公设，而对其它逻辑缺陷却采取容忍态度。在证明中借助直观，在很多人看来，觉得这是情有可原的。现在的小学、中学和大学数学教学，仍然经常有意无意地利用直观，来减少繁琐乏味的冗长叙述。

不过，作为课程的几何学与作为科学的几何

学有着原则的区别。作为课程的几何学，要针对中学生的年龄特点，考虑可接受性，并且作为整个教学计划的一部分，受到学时的限制。而作为科学的几何学，首先应该考虑它的科学性。是否自洽，即是否没有内在矛盾？特别是在庞加莱引进双曲几何学的单位圆模型和单位球模型以后，把双曲几何学的定理全部以特定方式解释成欧氏几何的定理，这样就把人们对双曲几何的疑虑带进了欧氏几何。双曲几何学的定理与经验的差距是那样的显著，很难想象双曲几何中一定不包含逻辑矛盾.万一在双曲几何中包含某个矛盾，欧氏几何中就会包含相应的矛盾。尽管人们对欧几里得几何的正确性充满信心，但是由于《几何原本》的漏洞太多，使人不得不采取谨慎态度。因而，在十九世纪的最后三十年间，关于几何基础的研究受到高度重视。

要使几何学有一个坚实的基础，就不能只关心个别的公理，而必须提供一整套关于概念和公理、定理的严密系统。在这方面，德国数学家巴士（1843～1930）和意大利数学家皮亚诺（1858～1932）都做了重要的工作，而以德国数学家希尔伯特（1862～1943）的贡献尤为重要。希尔伯特在他的书《几何基础》中，对欧氏几何及有

关几何的公理系统进行了深入的研究。还有一些人提出了欧氏几何的另外一些公理系统，但是希尔伯特的公理系统最接近于《几何原本》的原貌。



图 7—1 希尔伯特

希尔伯特《几何基础》的第一版出版于1899年。后来经过多次修改，目前一般引用1930年出版的第七版。这本书的中文译本就是根据第七版译出的。现在我们就来看看，希尔伯特在《几何基础》书中提出的几何公理系统是怎样的，它与欧几里得在《几何原本》中所做的有什么不同。

希尔伯特在《几何基础》中首先叙述一些不加定义的基本概念。他设想有三组不同的对象，分别叫做点、直线、平面。又设想点、直线和平面间有一定的相互关系，用“在…之上”、“在…之间”、“全合”、“平行”、“连续”这些术语表示。几何公理就是这些关系的恰当的、而

又（对于数学的目的而说的）完备的叙述。

在希尔伯特的公理系统中，几何公理分为五类，共20条。先把这些公理整个浏览一遍，然后解释。

第一类是关联公理，又叫从属公理，有8条，编号为I_1～I_8.这组公理考虑在被称为点、直线、平面的三组对象之间的一种“关联”关系，他用术语“属于”来表示这种关系。

I_1.已知A和B两点，恒有一直线a，它属于A和B这两点中的每一点，而且A和B这两点的每一点也属于a。

I_2。已知A和B两点，至多有一直线，它属于A和B这两点的每一点，而且A和B这两点的每一点也属于这直线。

这里说到两点时，总是指两个不同的点；其余类推。

“属于”这个术语，也可换成更方便的一些术语。例如：“直线a属于A和B这两点的每一点”，可以说成直线a通过点A和B，直线a连接点A和B；“点A属于直线a”，可以说成点A在直线a上，A是直线a的点，A是直线a上的点，直线a上含有点A等；若点A在直线a上，又在另一直线b上，就说直线a和b相交于A，

A是a和b的交点或公共点，等等．

I_3．一直线上恒至少有两点，至少有三点不在同一直线上．

I_4．已知不在同一直线上的A、B和C三点，恒有一平面α，它属于A、B和C这三点中的每一点，而且A、B和C这三点中的每一点也属于α．已知一平面，恒有一点属于这平面，而且这平面也属于这个点．

这时也说：点A在平面α上，A是平面α的点，等等．

I_5．已知不在同一直线上的A、B和C三点，至多有一平面，它属于A、B和C这三点中的每一点，而且A、B和C这三点中的每一点也属于这个平面．

I_6．若一直线a的A和B两点在一平面α上，则a的每一点都在平面α上，

这时也说：这直线a在平面α上，等等．

I_7．若α和β两平面有一公共点A，则它们至少还有另一公共点B．

I_8．至少有四点不在同一平面上．

第二类公理是次序公理，有4条，编号为II_1～II_4．

一直线上的点有一定的相互关系，用“在…

之间”这个术语来描写它。

II_1.若点B在点A和点C之间，则A、B和C是一直线上的不同的三点，而且B也在C和A之间。

II_2.已知A和C两点，直线AC上恒至少有一点B，使得C在A和B之间。

II_3. 一直线的任意三点中，至多有一点在其它两点之间。

定义。考虑一直线a上的两点A和B.把这一对点A和B叫做一个线段，用AB或BA表示。在A和B之间的点叫做线段AB的点，或线段AB内的点；A和B叫做线段AB的端点，直线a上的其他的点叫做线段AB外的点。

II_4. 设A、B和C是不在同一直线上的三点。设a是平面ABC的一直线，但不通过A、B、C这三点中的任一点，若直线a通过线段AB的一点，则它必定也通过线段AC或BC的一点（巴士公理）。

如果采用直观的说法，公理II_4可以说成：若一直线走进三角形内部，则它必定还要走出来。

第三类公理是全合公理，有5条，编号为III_1～III_5。

全合公理是为了处理图形的移动而引进的。

某些线段之间有一定的相互关系，用“全合”或“相等”这个术语表示．线段AB与$A'B'$全合或相等，可用记号表示为

$$AB=A'B'$$

由于AB和BA表示同一线段，所以上式中的AB可改写成BA，$A'B'$可以改写成$B'A'$．

利用次序公理及其推论，可以考虑一直线上位于一点同侧或异侧的点，一平面上位于一直线同侧或异侧的点．此外，还可仿照通常办法定义三角形的概念．

I_1．设A和B是直线a上的两点，A'是直线a'上的点，a'可以与a相同，也可以不同．又设指定了直线a'上A'的一侧，则在a'上A'的指定一侧必有点B'，使$AB=A'B'$．

这条公理实际上是说，线段能从任一位置移动到另一任意指定位置．

I_2．若$A'B'=AB$，并且$A''B''=AB$，则$A'B'=A''B''$．

这条公理相当于欧几里得的“等于同量的量相等”，但是仅限于线段．

I_3．设两线段AB和BC在同一直线a上，且无公共点；两线段$A'B'$和$B'C'$在同一直线a'上，也无公共点；a'可与a相同，也可不同．若

$$AB = A'B' \text{ 且 } BC = B'C'$$

则

$$AC = A'C'$$

直线a上点O的同侧的点的全体，叫做以点O为始点的一条射线。设h和k是同一平面内有公共始点O的两条射线，并且不在同一直线上，那么这一对射线h和k叫做一个角，记为$\angle(h,k)$或$\angle(k,h)$. h、k称为边，O为顶点。

根据这个定义，所考虑的角总是大于零而小于平角。由此可定义角的内部和外部。

某些角之间有一定的相互关系，用"全合"或"相等"表示。$\angle(h,k)$与$\angle(h',k')$全合或相等，可记为

$$\angle(h,k) = \angle(h',k')$$

上式左边的$\angle(h,k)$可改写成$\angle(k,h)$，右边的$\angle(h',k')$可改写成$\angle(k',h')$，因为角的两边顺序可以交换。又若角的顶点为O，角的两边上各有一点A和B，还可将角的记号改写为$\angle AOB$.

Ⅲ₄.设给定了一平面α上的一个角$\angle(h,k)$，平面α'上的直线a'，以及平面α'上直线a'的一侧，设h'是直线a'上从一点O'开始的一条射线，则在平面α'上在a'的指定一侧恰有一条射线k'，使$\angle(h,k) = \angle(h',k')$。每个角与它自己全合。

这个公理由两部分组成：前一部分是说一个角可从任一位置移动到另一任意位置；后一部分是说每个角与它自己相等。

Ⅲ$_5$.两个三角形ABC和$A'B'C'$若满足

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ \angle BAC=\angle B'A'C'$$

则必有

$$\angle ABC=\angle A'B'C'$$

这条公理看上去有点象我国现行初中《几何》课本中关于三角形全等的“边角边公理”，实际上仍有显著差别。根据公理Ⅲ$_5$，虽然可以通过改变字母知道这时也成立$\angle ACB=\angle A'C'B'$，但是BC是否等于$B'C'$，仍有待证明。

第四类公理是平行公理，只有一条，编号为Ⅳ.

Ⅳ（欧几里得公理）．设a是任一直线，A是a外的任一点．在a和A决定的平面上，至多有一条直线过A而不与a相交。

第五类公理是连续公理，有两条，编号为Ⅴ$_1$～Ⅴ$_2$.

Ⅴ$_1$（度量公理，又称阿基米德公理）.若AB和CD是任意两线段，则在从A开始并通过点B的射线上必有这样的有限个点A_1、A_2、…、A_n，使

得线段 AA_1、A_1A_2、…、$A_{n-1}A_n$ 都与线段CD 全合，而且B在A与A_n之间。

V_2(直线完全性的公理)。一直线上的点所成的点集，在保持直线上的次序、第一条全合公理、以及阿基米德公理（即公理I_{1-2}，I，II_1，V_1）的条件之下，不可能再行扩充。

以上就是希尔伯特《几何基础》第七版中的全部20条欧氏几何公理。与欧几里得《几何原本》的公理表相比，希尔伯特的这个公理系统可以用“非常完善”这几个字来形容，其优越性主要体现在三性：完备性、相容性、独立性。

先看完备性。希尔伯特的这一套公理，可以用来推证出欧几里得的平面几何和立体几何中的全部定理，而不需再引进新的假定，所以说它是完备的。任何三种被称为点、直线、平面的对象，只要满足这20条公理，就一定满足欧氏平面几何和立体几何的全部定理。欧几里得的公理表太小，不够用，不但他自己在《几何原本》的论证过程中常常求助直观，默认一些看上去很明显的事实，而且很多批评欧几里得的学者，在他们试证欧几里得第五公设的时候，或者在他们抛弃第五公设而发展非欧几何的时候，如果他们的逻辑依据只是《几何原本》中那个很不完备的公理

九
甲

表，或者只作了局部的小修小补，就不能认为他们的论证过程是很严格的。列入公理表的命题，为数极少，都已经过精心的挑选和严格的审查，确认它们能够真实反映现实世界的某些客观规律；而在论证过程中信手拈来的一个貌似明显的假定，往往可能带有某种片面性。公理系统的完备性，为严格地展开一种数学理论提供了充分的逻辑依据。

其次看相容性，即无矛盾性。由于可从公理系统出发，利用逻辑推理的方法，展开整个理论，所以，要看整个理论有无内在的逻辑矛盾，只需检查作为理论出发点的一套公理有无内在矛盾。对于欧氏几何来说，只需检查希尔伯特的20条公理之间有没有互相矛盾的地方。这20条公理中的每一条都符合我们的实践经验，令人感到可以信赖，相信它们之间不存在互相矛盾的地方。事实上，也没有谁能够找出它们之间的任何矛盾。但是，找不出并不等于不存在。究竟怎样才能证明这套公理的相容性呢？1898年庞加莱发表了一个见解，认为：一个公理地建立起来的结构，如果能给它一个算术解释，就可以相信它的相容性。希尔伯特在《几何基础》中对他的公理系统具体作出了一个算术解释，因而证明了这个公理系统具有相容性。更确切地说，希尔伯特证明了，如

果欧氏几何包含逻辑矛盾，那么算术一定包含相应的矛盾；既然大家从长期实践经验中相信算术不含逻辑矛盾，那么对欧氏几何也应寄予同样程度的信赖。这个答案，已经能够令人相当满意了。

由于双曲几何学的内容可通过庞加莱的解释或菲利克斯·克莱因的解释转化为欧氏几何学的相应内容，在希尔伯特证明了欧氏几何的相容性以后，随之就推出双曲几何的相容性。

希尔伯特把他在《几何基础》书中列出的平行公理Ⅳ叫做欧几里得公理，虽然它不是欧几里得提出的，而只是欧几里得第五公设的一个等价命题，通常叫做普雷菲尔公理。把它叫做欧几里得平行公理，或者简称欧几里得公理，只是为了强调，在希尔伯特的公理系统之下，如果采用这条公理作为平行公理，结果就得到欧氏几何学；而如果采用与它相反的假定作为平行公理，即假定在平面内过定直线外一点至少可引二直线不与已知直线相交，结果就得到双曲几何学。

从希尔伯特的全套公理Ⅰ～Ⅴ可得到欧氏几何，它是相容的；把其中的欧几里得平行公理Ⅳ换成其对立的命题，得到双曲几何，它也是相容的，这样对比之下，就证明了，平行公理Ⅳ不能从

其它19条公理推出，这就意味着，在希尔伯特的公理系统中，平行公理具有独立性。

采用类似的构作新几何的方法，希尔伯特证明了：他在《几何基础》书中列出的这五类公理，其中每一个组成部分都不能作为它前面的各类的逻辑推论。

例如，为了证明公理V_2的独立性，希尔伯特构作了满足公理I～Ⅳ和V_1但不满足V_2的几何。只要在普通解析几何公式的基础上稍加变化，就能得到这种几何。在这种几何里，直线和圆周都不是连续的，上面布满了透气孔，因而从直线一侧走到另一侧，或是从圆内走到圆外，只要算准空档，就可以大摇大摆地穿越过去，而不会受到任何阻拦。具体构作方法，是把实数集R换成它的一个特殊的子集Ω，这里Ω中的数都是从1这个数出发，作有限次下列五种运算得来的：加、减、乘、除、求算术平方根$\sqrt{1+\omega^2}$，其中ω表示用这五种运算得来的某个数。因此，如果a和b是Ω中的任意两个数，那么$a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}$和$\sqrt{a^2+b^2}$也都是Ω中的数（对于$\frac{a}{b}$应受$b\neq0$的限制）。现在限定所有的坐标和系数都只能取集合Ω中的数，而在形式上仍然仿照平面解

析几何，把一对有序的数(x,y)叫做一点M，把有序的三个数的比$(u:v:w)$叫做一条直线l，其中x、y、u、v和w都是Ω中的数，u和v不同时为0。如果数组(x,y)和连比$(u:v:w)$满足关系式

$$ux+vy+w=0$$

就说点(x,y)在直线$(u:v:w)$上。其余概念也都这样模仿普通的平面解析几何加以规定，就能验证，公理Ⅰ～Ⅳ和V_1中有关平面几何的各条都能满足，只有公理V_2不满足。

也许有人会产生怀疑：难道这种漏洞百出的"直线"也算是直线吗？恐怕只能算是冒牌货吧！

请不要忘记，希尔伯特有言在先，说是设想有三组不同的对象，第一组的对象叫做点，第二组的对象叫做直线，第三组的对象叫做平面。他只告诉我们，这三组对象的名字分别叫做点、直线、平面，并没有交代它们的形象如何。希尔伯特又说，设想点、直线和平面间有一定的相互关系，用"在…之上"、"在…之间"、"全合"、"平行"、"连续"诸术语表示。他也没有限定这些术语非得按通常意义理解不可。接下来又说，几何公理就是这些关系的恰当的、而又（对于数学的目的而说的）完备的叙述。这也不涉及

讨论对象和它们之间的关系的那些术语的具体含义。这里讨论的只是抽象的对象之间的抽象的关系，只要它们满足这套抽象的公理，就一定满足由它们逻辑地推演出来的整个几何理论，这种几何理论也是抽象的。如果对于几何学的各个基本研究对象及其基本关系赋予某种具体含义，经过验证知道满足全套公理，那么在这个具体系统中就一定成立这种几何学的全部定理，因而得到这种几何学的一个模型。一种几何，可有多种不同模型。

设想在你手头有一本希尔伯特的《几何基础》，碰巧又有一个五场话剧的剧本。你会觉得这两者之间有某种相似之处。被希尔伯特称为点、直线、平面的三种几何对象，像是那剧本里的剧中人，剧本的作者给每位剧中人取了一个名字。被希尔伯特用术语“在…之上”、“全合”“平行”等表示的一些基本关系，类似于剧本里涉及的剧中人之间的相互关系。你可以设想自己是一位导演，阅读希尔伯特的五类公理及其推论，就象是在钻研剧情，反复揣摩怎样给每一位抽象的剧中人恰当地寻找一位具体的扮演者，还要考虑这些演员配合在一起是否协调和谐。有些演员只能演好前面几场，另一些演员则能胜任全剧

的演出．一个经过千锤百炼的精采剧本，能够活跃舞台几十年，甚至跨越世纪，演员的阵容不妨屡经更动。拿这些常识来作类比，就容易理解用现代公理方法抽象地建立的几何理论与它的各个具体模型之间的关系。

由此可见，从欧几里得的《几何原本》到希尔伯特的《几何基础》，并不是简单地堵漏补遗，而是从一种具体的特定模型上升为抽象的普遍理论。这种升华固然是历史发展的必然趋势，而对《几何原本》缺陷的批评和改进的尝试，特别是对欧几里得第五公设问题的深入研究，也起了重要的诱发作用。

在研究欧氏几何公理系统的同时，得到了一些意外的副产品。除去以非常一般的形式建立起射影几何学的公理系统而外，在十九世纪末和二十世纪初，还建立了各种各样特别的公理几何学，其中有一部分已得到不同程度的应用。特别是一种叫做“有限射影几何”的，由于在试验设计中得到应用，现在已发展成为一个很活跃的数学分支。有限射影几何类似于通常的射影几何，但是每个平面上只有有限多条直线，每条直线上只有有限多个点。最简单的有限射影平面只包含7条直线和7个点，每条直线上恰好有三个点，

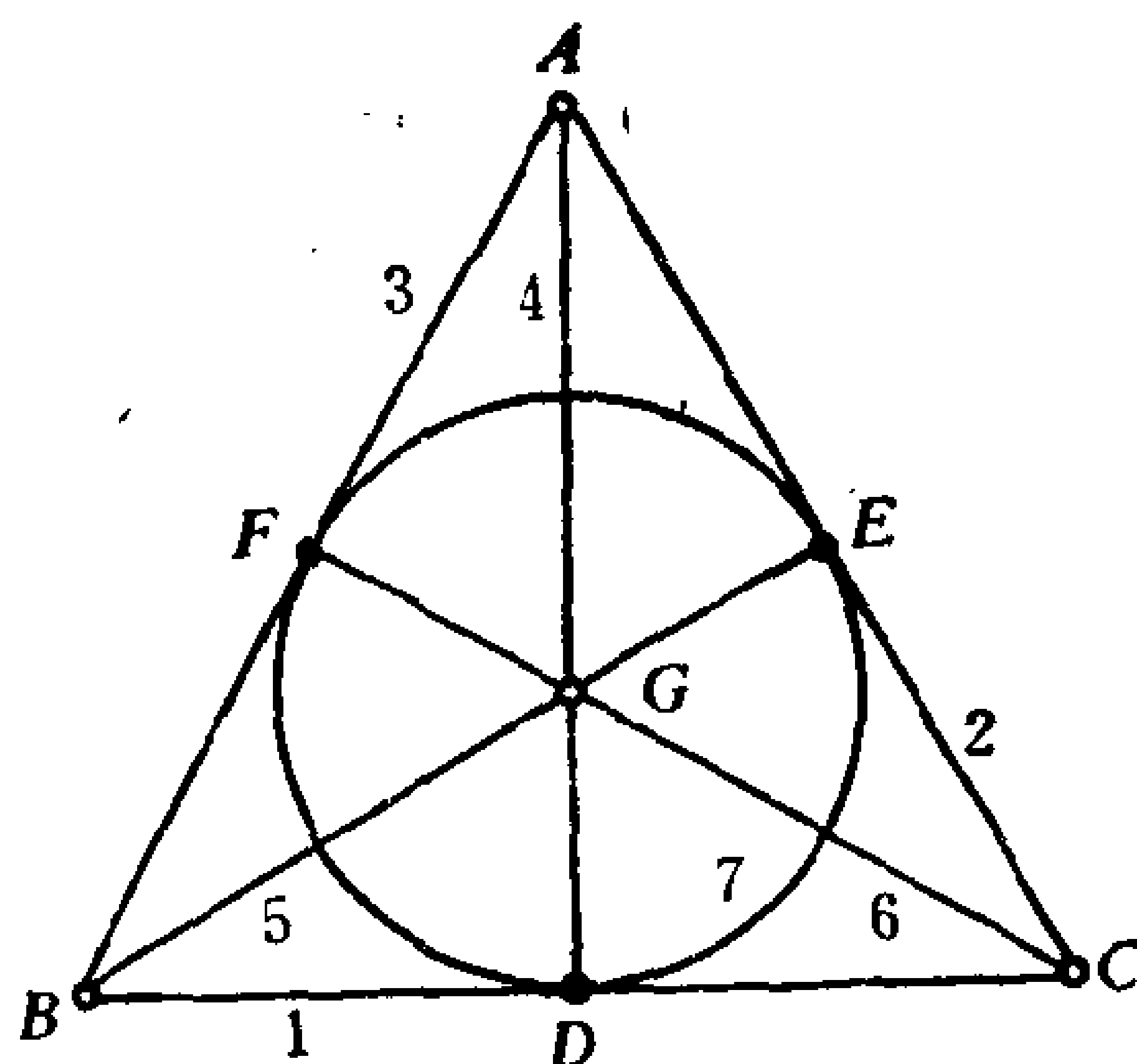


图 7—2 有限射影平面的模型

每个点恰好在三条直线上。图 7 — 2 是这种有限射影平面的一个模型。图中用小圆圈标出的点 A、B、C、D、E、F、G 是有限射影平面上的七个点，不妨设想它们是某个城市的七个最重要的公共汽车站，如火车站、轮船码头、中百一店等。图中还有六条直线 BDC、CEA、AFB、AGD、BGE、CGF 和一个圆 DEF，分别标注了数字 1 ～ 7，可以设想它们是七条主要公共汽车线路，数字 1 ～ 7 就是线路的编号，其中的 7 路车是环行的。这七条主要公共汽车线路，可以看成是有限射影平面中的七条直线。为了叙述方便，我们将把这七点七线说成是七个大站和七条干线。图 7 — 2 所示的公共汽车线路图，有下面列举的一些很好的性

质。

1．每两个不同的大站有且仅有一条干线相连。

用数学的口吻来说，就是：任给两个不同的点，有且只有一条直线同时通过这两点。这意味着满足希尔伯特公理系统中的关联公理 I_1和I_2。这是直线的基本特征。

2．任何两条干线之间都可从某一大站转车。

用数学术语来说，就是：任何两条直线都有公共点。这是射影平面的基本特征。

这种有限射影几何还有许多很深入的数学性质，与抽象代数学紧密联系着，这里就不细说了。现在我们来看一看，这种有限射影几何怎么会同试验设计发生联系的。

仍然考虑图7—2所示的有限射影平面模型，不过这一次不是把它看成公交线路图，而是看成田间试验方案示意图。把图中的七个点看成某种农作物的七个品种，七条线看成七小块试验田，每一小块试验田叫做一个区组。一条线通过某三个点，表示对应的区组内种植这三个品种。因而从图中所示的有限射影平面得到一个试验设计方案，它把七个品种安排在七个区组内种

植，使得每个区组都包含同样多的品种（3个），每个品种都出现在同样多的区组里（3个），每两个品种都在同样多个区组里比较过优劣（1个）。具有这样平等条件的试验设计方案，叫做平衡不完全区组设计（balenced incomplete block design），简称为BIB设计.利用有限射影几何可以构作很多BIB设计。

有限射影几何的例子表明，从直观的欧氏几何发展为抽象的公理几何，使人们能够用更加灵活多样的方式研究现实世界的规律。

虽然如此，人们总是还想问个明白：现实世界究竟适用哪一种几何学呢？

八 时空的四维几何学



出自幽谷，

迁于乔木。

《诗经·小雅·伐木》

惊险影片的大师们善于制造悬念，以艺术的魅力，紧扣观众的心弦，使他们渴望了解剧情的发展，而电影的结局总是那样出人意料而又合于情理。

大自然就象是一位超级艺术大师，人类在探求自然奥秘的漫长征途中，常有意外的欢乐和难以预料的挫折。虽无险象环生，却也常见异峰突起，而悉心研究所得的答案，则往往令人附掌称奇。

高斯通过研究欧几里得第五公设，对欧氏几何是否必然适用于现实世界，提出了怀疑。

罗巴切夫斯基发表的双曲几何学得不到同代

人的承认，他把希望寄托于星空的测量，期待着有朝一日双曲几何学能够代替欧氏几何而跻身于大千世界。

现实世界究竟适用哪一种几何学？这是一个无法回避的问题，也是一个令人烦恼的问题。要想回答这个问题，如果只凭藉数学的力量，未免势孤力单。毕竟，数学在发展概念、定理和公式的逻辑体系时，是那样的得心应手；而直接研究现实世界，却是物理的擅长。如果没有物理学的帮助，这个问题就不能得到正确的答案。

在传统的欧几里得几何中，只考虑具有长、宽、高三度的空间，而不考虑时间。从欧几里得几何出发，抽掉第五公设，换上相反的假定，就得到双曲几何。所以，双曲几何继承了欧氏几何的传统，也是只谈空间、不讲时间。点动成线、线动成面、面动成体，这些生动的几何直觉，常被代之以摄影式的静止图景：面是体的界限，线是面的界限，点是线的界限。

然而，现实世界的万事万物都处在永恒的运动当中，静止只是相对的和暂时的。要表现运动，就不能只说明在何地，还必须指出在何时。传统几何学的基本研究对象是点，要说明一点在空间的位置，需要三个坐标 (x,y,z)；物理学的

基本研究对象是事件，要说明一个事件发生于何时何地，除去三个空间坐标 (x,y,z) 而外，还需要时间坐标 t.因此，研究物理事件，需要在由一切有序四数组 (x,y,z,t) 构成的四维坐标空间里进行，这个四维空间叫做时空。

直到十九世纪为止，物理学中也没有发现时间和空间有什么密切的内在联系。如果把空间设想成一间大厅，时间便象是穿堂而过的流矢。当时人们对时、空关系的理解，大致上就是这样的。“光阴似箭，日月如梭”，就是这种传统时空观的写照。

十九世纪后期的一些物理实验，特别是著名的迈克耳逊—莫雷实验，使持有传统时空观的物理学家们困惑不解。

当时对物理场的概念还不太清楚，认为就象我们生活在空气当中一样，宇宙空间也充满一种叫做“以太”的无形物质，电磁波和光波就是通过以太传播的. 随着地球绕太阳的公转，地球与以太发生相对运动。空气流动形成风；以太与地球相对运动，也会产生拂面而来的以太风。如果真是这样，只要设计出足够灵巧的精密仪器，就能测出以太风所引起的微小变化。美国物理学家迈克耳逊和莫雷设计的实验，就是为了达到这

个目的。下面是实验装置的示意图。

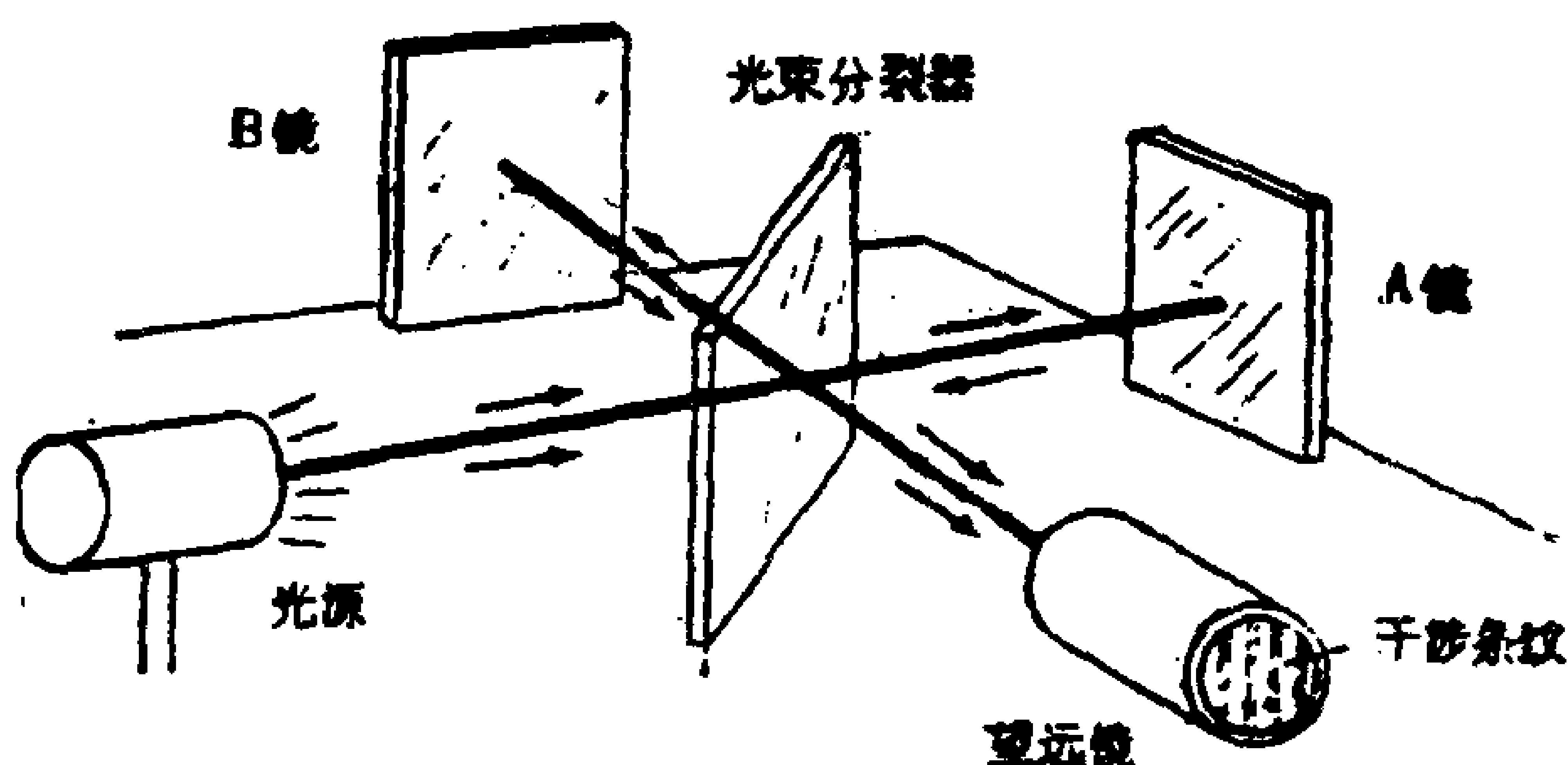


图 8—1 迈克耳逊—莫雷实验

这个实验的基本原理是这样的：从光源射出的一束光线传到仪器的中央，在那里有一块成45°角倾斜的薄片，让一部分光线透过薄片，射向A镜；另一部分光线经薄片反射，射向B镜，射向B的光线与射向A的光线垂直。仔细调节仪器，可保证从薄片到A镜的距离等于到B镜的距离。被A镜反射回来的光束受到薄片背面的反射后，进入一个小望远镜；被B镜反射回来的光束，透过薄片后，与A路光线会合，同样进入小望远镜。如果这两路光线在途中所花费的时间不同，根据经典光学，就会产生干涉，从望远镜里将能看到干涉条纹。

如图8—2，设薄片中心为O，$OA=OB=$

d，光速为 c，地球与以太相对运动的速度为v，并设OA方向与v的方向一致。那么根据经典力学，沿着垂直于以太风的方向 OB，光线往返的速度仍然都是 c，而在OA 方向上传播时，光线的"顺风速"和"逆风速"分别是 $c+v$和 $c-v$. 设光线沿OA 和 OB 往返所需时间分别为t_A和t_B，则

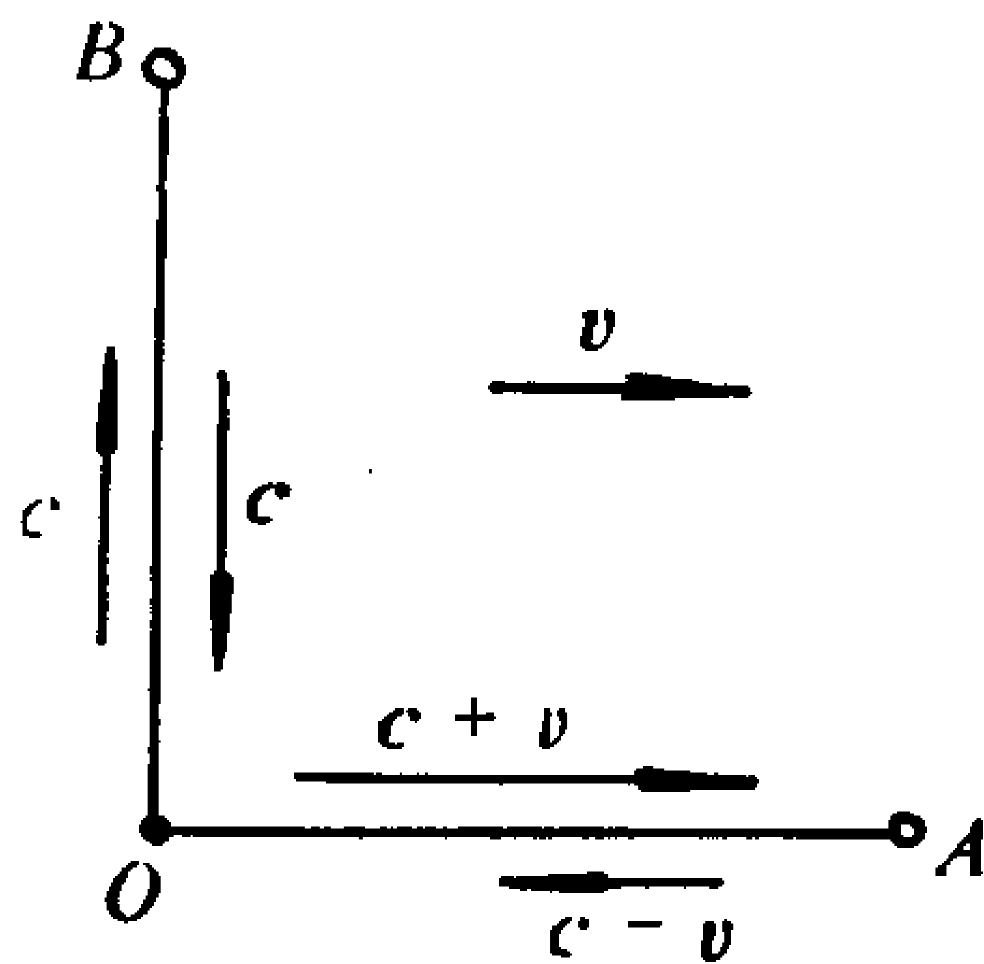


图 8—2

$$t_B=\frac{2d}{c}$$

$$t_A=\frac{d}{c+v}+\frac{d}{c-v}=\frac{2cd}{c^2-v^2}$$

$$=\frac{2d}{c-\frac{v^2}{c}}<\frac{2d}{c}$$

$$\therefore\ t_A<t_B$$

由于地球每24小时自转一周，所以如果某一时刻OA平行于地球与以太相对运动的方向，那么 6 小时后OA与OB两直线将交换位置，因而在 6 小时后将有 $t_B<t_A$. 这一变化将使望远镜中看到

的干涉条纹发生明显的移动。

1880年第一次做这个试验，谁知结果根本看不到有什么干涉条纹的移动。根据经典力学，怎么也不能解释这个意外结果。物理学面临着一场危机。

1905年，在瑞士一家专利局工作的一位德国青年人提出一种新的时空理论，使物理学摆脱困境，重新出现勃勃生机。这位年青人就是后来举世闻名的物理学家爱因斯坦（1875～1955），他所提出的理论被称为狭义相对论。

为了说明狭义相对论的时空几何学与以前的有何本质区别，让我们来分析一些理想化的假想情况。

设想在晴朗的夏夜，有一位天文爱好者，在家中的阳台上观测夜景。他注意到，在近处街角的交通岗亭开始亮起红灯的时候，天边的一颗星恰好闪耀了一下。他把"亮红灯"称为发生于此时此地的事件 A，"星光闪"称为发生于彼时彼地的事件 B。他还知道，这颗星到地球的距离是一光年，即光线在 1 年时间内走过的距离，约等于 9.4605×10^{15}米。因而，现在映入眼帘的星光，1年以前就已从星体表面发出。所以，如果分别考虑"此时此地亮红灯"与"彼时彼地星光闪"

这两个事件的时间差 $|\Delta t|$ 和它们在三维空间 E_3 中的距离 Δl，并且用 c 表示光速，就有

$$|\Delta t| = 1\text{年}, \quad \Delta l = 1\text{光年}$$

$$\frac{\Delta l}{|\Delta t|} = c$$

一般地，如果此时此地发生的事件 A 与彼时彼地发生的事件 B 恰好被同时观测到，总有

$$c|\Delta t| = \Delta l$$

即

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = 0$$

由此，在四维时空 V_4 中引进量 $\Delta\sigma$，定义为

$$(\Delta\sigma)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2$$

这样定义的 $\Delta\sigma$ 叫做事件 A 和 B 在时空 V_4 中的间隔。若事件 A 和 B 被同时观测到，则它们的间隔 $\Delta\sigma = 0$。

设想另外还有一位观测者，坐在正在沿公路匀速行驶的汽车里，从窗口往外观察。他也观测到了事件 A 和事件 B，不过在他的观测系统里，测得事件 A 和 B 的时间差为 $|\Delta t'|$，空间距离为 $\Delta l'$，时空间隔为 $\Delta\sigma'$. 每个观测系统叫做一个参照系，也就是四维时空中的一个坐标系。在相对论以前的物理学中，认为两个惯性参照系之间的变换满足

$$\begin{cases} \Delta t' = \Delta t & (1) \\ \Delta l' = \Delta l & (2) \end{cases}$$

同时满足条件（1）和（2）的变换叫做伽里略变换，对应的时空叫做牛顿时空。一个典型的伽里略变换是

$$t' = t$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

其中v是常数，是两个惯性系相对运动的速度。

狭义相对论则认为，两个惯性参照系之间的变换应该满足

$$\Delta\sigma' = \Delta\sigma$$

即

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta l')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 \quad (3)$$

满足条件（3）的变换叫做洛仑兹变换，对应的时空叫做相对论时空。一个典型的洛仑兹变换是

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

通常两个惯性系相对运动的速度 v比光速 c小得多，因而

$$\frac{v}{c} \approx 0$$

这时洛仑兹变换近似地变成伽里略变换。而当 v 大到接近于光速c 时，洛仑兹变换与伽里略变换的区别就十分显著。

从几何观点看，条件（3）导致度规

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

这个度规叫做明可夫斯基度规。狭义相对论的时空的物理理论，在数学形式上，表现为将时空 V_4配备明可夫斯基度规后所得到的四维黎曼几何学。

看上去爱因斯坦的假定似乎非常大胆，实际上却是很谨慎又很自然的。经典力学的定律，是从通常遇到的大量低速现象中概括总结出来的，它能以很高的精确度描写这些常见的低速现象。电磁波和光波的传播速度高达每秒三十万千米，经典力学的观念能否不加修改地应用于涉及电磁和光的高速现象，其实并未得到充分可靠的依据。爱因斯坦的基本想法是：要从经过实验充分

证明的可靠事实出发。他注意到，揭示电磁现象基本规律的麦克斯韦方程已经得到观测和实验的有力支持，因而他把电磁学定律和与之有关的光在真空中的传播放在优先考虑的地位。麦克斯韦方程在伽里略变换下要改变形式，而在洛仑兹变换下却保持不变。从这些基本想法出发，经过细致的论证，自然会导致狭义相对论。

狭义相对论是一个成功的理论。它使人们能够了解原子、原子核和宇宙线内发生的过程。爱因斯坦根据狭义相对论建立的质量与能量之间的关系$E=mc^2$，在利用原子核能的问题上起着决定性的作用。现代的带电粒子加速器，设计时必须根据相对论力学计算尺寸。

狭义相对论表明，现实世界的几何学，既不是传统的三维欧几里得几何学，也不是罗巴切夫斯基等人提出的三维的双曲几何学，而是一种四维的几何学。涉及高速现象时，空间的量度和时间的测定搅在一起，难解难分，不能再像传统的欧氏几何那样只谈空间，不管时间。

1915年，爱因斯坦发表了广义相对论，进一步把时间、空间和引力的理论揉合在一起。他在大学时代的同窗好友格罗斯曼帮助他克服数学困难，掌握了黎曼几何与张量算法。在广义相对论

中，四维时空V_4配备了黎曼度规

$$ds^2=\sum_{j,k=1}^{4} g_{jk}dx_j dx_k$$

上式右边的二次微分形式的号差为(－，－，－，＋)，即在任一点把右边关于dx_j的二次齐次式化为平方的代数和以后，包含三个负项，一个正项；此外，还应满足爱因斯坦的引力场方程

$$G_{jk}=8\pi T_{jk}$$

引力场方程右边的T_{jk}叫做能量—动量张量，表明产生引力场的物质的特性；左边的G_{jk}叫做爱因斯坦张量，是由g_{jk}及其一阶和二阶偏导数构成的一种复杂的表达式，反映四维时空的弯曲特性，这种弯曲性可作为引力存在的数学表现形式。引力场方程反映的最关键最根本的思想是：物质的分布和状态决定了时空的几何结构，反过来，时空的几何结构又决定了物质在引力场中如何运动。

对于球对称星体在它周围产生的引力场，例如太阳周围的引力场，可利用球对称条件和场方程解得对应的黎曼度规为

$$ds^2=\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2$$

$$-\frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

这个解叫做史瓦西解，解的上述度规表达式叫做史瓦西度规。根据史瓦西度规进行计算，可以知道，在靠近太阳的地方，广义相对论推出的结果与牛顿引力理论推出的结果有所不同。将这些区别与实际观测结果比较，就验证了广义相对论的正确性。其中的重要验证之一是水星的运动情况，水星绕太阳运行的轨道并不是一个固定的椭圆，这个椭圆的近日点还要绕太阳转动，每一百年转过43弧秒。这个数值在牛顿理论中一直没有办法解释，但是用广义相对论的弯曲时空理论却能很好地解释。广义相对论的另一重要验证是光线在通过太阳附近时发生弯曲。越是靠近太阳的地方，引力越强，从几何上看，就是时空弯曲得越厉害，因而四维时空中的测地线也将有比较明显的弯曲。平时白天阳光太强，无法看到擦过太阳边缘射到地球来的星光，只有日全食时才能看到。1919年5月29日发生日全食，为了不错过这个观测机会，英国皇家学会事先派出两支由英国天文学家组成的远征队，一支前往巴西，另一支去非洲西岸。结果，在爱丁顿爵士领导下的非洲

远征队测量拍得的照片首次证实了爱因斯坦关于光线在引力场中会弯曲的预言，因而验证了广义相对论的正确性。

还有其他人也曾提出一些不同的引力理论，但是在实验的支持方面不能显示出是否比广义相对论更好，理论结构却比广义相对论复杂。尽管广义相对论在理论的进一步完善方面还包含一些困难，但在现阶段尚能大体满足引力研究的基本需要。

现在可以把问题的答案推进一步：如果“现实世界”是指我们生活在其中的太阳系，那么它所适用的几何学将是具有史瓦西度规的四维黎曼几何学。

如果继续扩大视野，把“现实世界”理解为宇宙中迄今所能观测到的一切部分，那么也可按照广义相对论建立各种宇宙模型，每种相对论宇宙模型的数学形式仍是某种四维黎曼几何。

“现实世界适用哪种几何”的疑问，本来是从欧几里得第五公设的研究产生的，预期的答案是传统的欧氏几何或与之对立的双曲几何，但是随着物理观念的变革，原先指望的两种答案都落空了；原先发展黎曼几何时，并没有对它的实际应用抱有太大的指望，结果却通过相对论，成为认

识时间、空间和引力性质的重要工具.

然而这还不是问题的最后答案. 现实世界的自然现象是丰富多样的和错综复杂的. 要想更深入地认识自然界的规律, 要能建立更普遍的物理理论, 就需要在数学上相应地发展更复杂和更有力的方法,特别是几何的方法.物理学和几何学都需要坐标, 但又都力图摆脱坐标的影响. 坐标只是登山的拐杖, 可以借一把力, 但是无论物理定律或几何定理, 都必须与坐标无关. 所以, 几何和物理常常不约而同地想到一起. 物理的成就鼓舞几何的兴趣, 几何的理论帮助物理的进展. 继黎曼几何被成功地用于相对论之后, 纤维丛上的联络论被应用于规范场理论, 使人类对于现实世界的了解又前进了一大步.

什么是纤维丛呢?

纤维丛理论的基础是当代著名数学家陈省身 (1911～) 奠定的. 虽然它的严格定义需要很多预备知识, 基本思想却不难理解.



图 8—3 陈省身

一张平整的糖纸, 紧紧地包在一块水果夹心

糖上，糖纸必然会出现皱褶。事实上，无论是球形硬糖，或是方形奶糖或圆锥形的酒心巧克力，要用一张糖纸把它们裹得严严实实，糖纸上都不可避免地出现皱纹或卷曲。设想所用的糖纸是一些印满方格坐标网的透明纸，把它们包在糖上，就在糖果的表面引进了坐标系。要想用一张坐标纸覆盖整个曲面，往往会象糖纸一样起皱褶。为了使一个复杂的曲面上到处都有可供应用的坐标网，需要用许多小块的坐标纸仔细地贴满曲面，使得每一小块坐标纸都不出现皱纹，并且在坐标纸互相重叠的地方，不同坐标之间可以互化，并使得坐标变换式中出现的函数有足够的可微性。这样就得到一个可微分流形，简称微分流形，每一小块坐标纸给出它的一个局部坐标邻域。微分流形是一个整体概念，可以研究它的各种拓扑性质，即在连续变形下保持不变的性质。在微分流形M上引进黎曼度量g，得到黎曼流形(M,g)，流形M的拓扑性质和度量g的弯曲性质互相影响。经典微积分和微分方程的许多定理是在充分小的邻域里得到的，受到局部性的限制；发展起微分流形的理论以后，就对研究全局性质提供了方便。

在很多几何问题中，常需研究在一个微分流形各点处附加的各种有关图形的性质，例如流

形在一点的切线、切平面、法线、密切圆、法截线、活动标架等．这种情形，就象是在同一片山地上可以根据需要，种植不同品种的树．在每一点种一棵树，总起来得到一个树丛．每一点种桃树，就得到桃树丛；每一点种梨树，就得到梨树丛．种什么树，得什么丛．现在考虑一个微分流形M，叫做底流形．然后，象在山坡上种树那样，在微分流形M的每一点按一定的要求附上一个有关图形，叫做一个纤维，因而M的各点分别附上了同一种纤维．最后，用拓扑学的“胶水”把这些纤维粘合成为一个整体，就得到纤维丛．如果纤维是直线，就得到线丛；纤维是圆，得到圆丛；纤维是向量空间，得到向量丛．粘什么纤维，得什么丛．所用的纤维常有一定的对称性，例如纤维是直线时，可沿自身任意滑动；纤维是圆周时，可沿自身任意转动，等等．把一根纤维变成它自己的所有变换构成一个变换群，叫做纤维丛的结构群．如果底流形M是m维的，纤维是k维的，那么得到的纤维丛E是一个$m+k$维的微分流形，叫做总流形．把纤维粘合的拓扑方式，应该是局部积．粗略地说，就是总体上是否整齐，不去管它，至少在每一点附近，局部地看起来，纤维是整齐地排列着的．

例如，把底流形M取为xOy平面内的圆周

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ z=0$$

把纤维F取成直线。在底流形M的每一点附上一根纤维，就是过圆M的每一点在空间中作一条直线。局部积的拓扑学要求，限制了这些直线应该连续地变动过去，因而组成一个直纹曲面E，这个直纹面就是总流形。

如果作为纤维的各条直线都平行于z轴，那么所得曲面E的参数方程是

$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ z=t$$

这时总流形E是圆柱面。

如果沿着圆M环行一周时，纤维绕圆的切线转动半周，那么当回到原地时，直线恰好上下颠倒。这样得到的曲面E，方程是

$$x=\cos\theta+v\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta$$

$$y=\sin\theta+v\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

$$z=v\cos\frac{\theta}{2}$$

这样的曲面叫做莫比乌斯带，形状如图8—4所示。这幅图是画家埃歇在1963年发表的木刻，图中画着九个大蚂蚁沿曲面鱼贯而行。顺着这些蚂蚁的足迹，可以发现，莫比乌斯带没有正反两

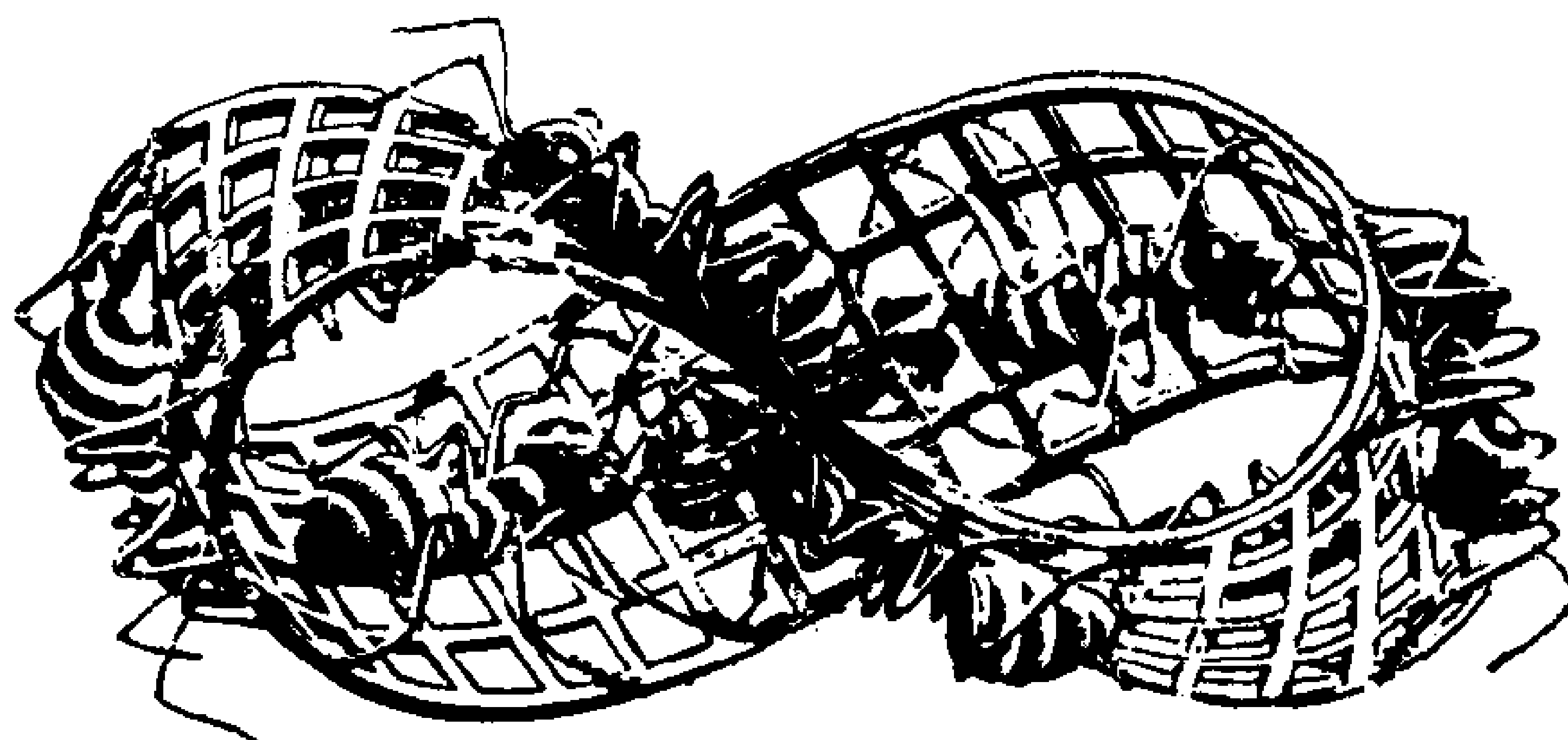


图 8—4 莫比乌斯带

面，它总共只有一个面。莫比乌斯带是单侧曲面的曲型例子，而圆柱面则是双侧曲面，两者在拓扑上不等价。

可以把微分法推广到纤维丛上来。为此需要引进“联络”．有了联络，就能定义协变导数，它是方向导数概念的推广。普通多元函数的二阶偏导数可以交换求导顺序，而协变导数一般不能交换顺序。这种不可换性可以解释为联络的弯曲，以适当方式引进一个表示不可交换性的张量，称为联络的曲率。

现在把视线转到物理方面。

自然界有四种基本的力：引力，电磁力，强相互作用和弱相互作用。广义相对论是在时空背景上关于引力的理论。在广义相对论经过观测验证而得到承认以后，爱因斯坦试图进而建立统一

场论，希期能够得到包括各种基本力的场的统一理论。还有一些其他人也参加了这项工作。有些工作试图把四维时空的几何扩大为五维，有的工作试图利用复空间或更一般的度量空间，等等。但是都没有能达到目的。

另一方面，1918年，韦尔（1885～1955）在《引力和电》一文中提出了规范场理论。现在知道，韦尔所研究的规范场，可以看成基于洛仑兹流形上的圆丛的几何学。后来杨振宁把规范场推广到一般情形，被称为杨一米尔斯场。杨振宁是从物理想法导出他的一般理论的，但是后来发现，其实这就是纤维丛上的联络。物理与几何再度联合，规范场的研究取得迅速进展。格拉肖·温伯格和萨拉姆利用规范场建立起弱相互作用和电磁力的统一理论，所预言的效应得到实验的证实，获得了诺贝尔奖金。物理学界正在雄心勃勃地向大统一理论冲刺。现在还不能预料最后的结果，但是可以期望，纤维丛上的联络理论将是很有用的数学工具。

杨振宁说："非交换的规范场与纤维丛这个美妙理论——数学家们发展它时并没有参考物理世界——在概念上的一致，对我来说是一大奇迹。"杨振宁还对陈省身说："这既是使人震惊

的，又是使人迷惑不解的，因为你们数学家是没有依据地虚构出这些概念来的。”陈省身立刻抗议道：“非也，非也，这些概念并不是幻想出来的。它们是自然的，而又是真实的。”

确实，纤维丛理论和规范场理论同样都是自然的和真实的。在某个阶段，数学家和物理学家互不了解对方的工作，根据自己研究领域内亟待解决的重大课题，确定主攻方向，结果不约而同地走向同一种数学结构，数学上取名为纤维丛，物理上取名为规范场。互相交流之后，双方恍然大悟，才知道“英雄所见略同”。

陈省身在一首诗中写道：“物理、几何是一家，一同携手到天涯。”在今后的征途中，物理与几何一定还会继续携手并进，在认识世界中共同发展，由于共同发展而更深刻地认识世界。

为了更深入、更全面地揭示现实世界的客观规律，今后所用到的几何理论也许会变得更复杂、更艰深。而所有这些抽象的现代几何理论，都是在几何空间概念突破传统框架之后出现的。空间概念的发展，具有深厚的实践基础，并且在漫长的历史发展过程中，取得了丰富的量变的积累。通过对欧几里得第五公设的研究，发现非欧几何，因而点燃了激起质变的导火索。在第一声

爆炸之后，便迅速引起连锁反应，势不可当，几何学的面貌从此焕然一新。欧几里得第五公设的真正价值，要从整个数学思想发展的长河中去了解。历史不会忘记欧几里得第五公设的功绩。可以相信，即使在若干年之后，人们还会回忆起这个著名的数学问题。

参考文献

〔1〕H.B.叶非莫夫，高等几何学（上、下册），裘光明译，高等教育出版社，1954。

〔2〕刘根洪，关于莫比乌斯带，数学通报，1981年第1期，26～27。

〔3〕W.J.考夫曼，相对论和黑洞的奇迹，卞毓麟、邹振隆、林盛然、蔡贤德译，知识出版社，1987。

〔4〕陈省身，从三角形到流形，尤承业译，自然杂志，2:8(1979),473～478,480。

〔5〕陈省身，广义相对论和微分几何，胡和生译，自然杂志，3:4(1980),243～247。

〔6〕陈省身、陈维桓，微分几何讲义，北京大学出版社，1983。

〔7〕苏步青，微分几何学，正中书局，1948。

〔8〕F.克莱因，关于现代几何学研究的比较考察，何绍庚、郭书春译，吴新谋、田方增、胡作玄校，数学史译文集，上海科学技术出版社，1981,13～22。

〔9〕M.克莱因，古今数学思想（1～4册），北京大学数学系数学史翻译组译，上海科学技术出版社，1979～1981。

〔10〕D.希尔倍脱，几何基础，第一分册，江泽涵等译，科学出版社，1958。

〔11〕张奠宙、赵斌，二十世纪数学史话， 知识出版社，1984。

〔12〕沈康身，中算导论，上海教育出版社，1986。

〔13〕李迪，中国数学史简编，辽宁人民出版社，1984。

〔14〕李国平、郭友中、陈银通， 自守函数与闵可夫斯基函数，科学出版社，1979。

〔15〕 Л.И. 罗巴切夫斯基，论几何原理， 罗见今译，数学史译文集续集，上海科学技术出版社，1985，1～17。

〔16〕项武义、王申怀、潘养廉，古典几何学， 复旦大学出版社，1986。

〔17〕 B.И.科士青，几何学基础，苏步青译， 商务印书馆，1954。

〔18〕莫绍揆，数学三次危机与数理逻辑，自然杂志，3:6(1980),403～408。

〔19〕爱因斯坦文集，第二卷，范岱年、 赵中立、许良英编译，商务印书馆，1977。

〔20〕 A.爱因斯坦，相对论的意义， 李灏译，科学出版社，1965。

〔21〕钱宝琮校点，算经十书（上、下册）， 中华书局，1963。

〔22〕钱端壮，几何基础，高等教育出版社，1959。

〔23〕梁宗巨，世界数学史简编， 辽宁人民出版社，1980。

〔24〕秦元勋，几何学通论，三联书店，1952。

〔25〕梅向明，三角形的内角和等于 180°吗？北京出

版社，1980.

〔26〕梅向明、刘增贤、林向岩， 高等几何，高等教育出版社，1983.

〔27〕D.J.斯特洛伊克， 数学简史， 科学出版社，1956.

〔28〕H.普恩加莱，科学与假设， 叶蕴理译， 商务印书馆，1930年初版，1957年重印第1版.

〔29〕蒋声，从欧氏平面三角公式 “译”出罗巴切夫斯基三角公式，数学通报，1963年第11期，28～31.

〔30〕蒋声，什么是非欧几何，初等数学论丛，第3辑，上海教育出版社，1981,58～73.

〔31〕蒋声，微分几何的应用，自然杂志，5:10(1982),733～735.

〔32〕蒋声，有限几何与试验设计，数学的实践与认识，1981年第3期，44～56.

〔33〕И.M.雅格龙，九种平面几何，陈光还译，莫绍揆校，上海科学技术出版社，1985.

〔34〕D.Gans, An Introduction to Non-Euclidean Geometry, Academic Press, Inc., 1973.

〔35〕M.J. Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History, 2nd Edition, W. H. Freeman and Company. San Francisco, 1973.

〔36〕T.L. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol, 1～3, Cambridge University Press, Cambridge, 1908.

〔37〕O. Veblen, and W.H. Bussey, Finite,

projective geometries, Trans. Amer. Math. Soc., 7 (1906), 241~259.

〔38〕 Я. Больаи, Аппендикс. Об осно-ваниях геометрии, Гостехиздат, Москва, 1956, 71~100.

〔39〕 К.Ф. Гаусс, Общие исследования о кривых поверхностях. Об основаниях Геометрии, Гостехиздат, Москва, 1956, 123~161.

〔40〕 Н.И. Лобачевский, Три сочинения по геометрии, Гостехиздат, Москва, 1956.

〔41〕 Н.И. Лобачевский, Избранные труды по геометрии, Изд. Академии наук СССР, Москва, 1956.

〔42〕 Б. Риман, О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Об основаниях геометрии, Гостехиздат, Москва, 1956 309~341.

〔43〕 Б.А. Розенфельд, История неевклидовой геометрии, Издательство«наука», Москва, 1976.

〔44〕 В.Д. Чистяков, Рассказы о математиках, Минск, 1963.

人名译名对照表

巴士	Pasch
巴特斯	Bartels
贝尔脱拉米	Beltrami
瓦雷斯	Wallis
韦尔	Weyl
兰贝特	Lambert
迈克耳逊	Michelson
皮亚诺	Peano
史瓦西	Schwarzschild
达朗贝尔	D'Alembert
丢勒	Dürer
米尔斯	Mills
亚诺什·鲍耶	Janos (John) Bolyai
伏尔夫刚·鲍耶	Wolfgang Farkas Bolyai
托里努斯	Taurinus
伟烈亚力	Alexander Wylie
考夫曼	Kaufmann
阿基米德	Archimedes
陈省身	S. S. Chern
芬恩	Fenn
伽里略	Gelileo

克来洛	Clairaut
克莱因，F.（菲利克斯）	Felix Klein
克莱因，M.（莫里斯）	Morris Kline
凯莱	Cayley
利玛窦	Matteo Ricci
麦克斯韦	Maxwell
闵定格	Minding
希尔伯特	Hilbert
希尔倍脱（即希尔伯特）	Hilbert
希思	Heath
拉盖尔	Laguerre
罗巴切夫斯基	Лобачевский
明可夫斯基	Minkowski
欧几里得	Euclid
庞加莱	Poincaré
叔本华	Schopenhaur
杨振宁	C. N. Yang
柏拉图	Plato
科士青	Костин
洛仑兹	Lorentz
须外卡尔特	Schweikart
爱丁顿	Eddington
爱因斯坦	Einstein
格拉斯曼	Grassmann
格拉肖	Glashow
格罗斯曼	Grossmann
海伯格	Heiberg

莱布尼兹	Leibniz
莫比乌斯	Möbius
莫雷	Morley
莫里斯·克莱因	Morris Kline
泰奥恩	Theon
笛卡儿	Descartes
笛沙格	Desagues
菲利克斯·克莱因	Felix Klein
高斯	Gauss
勒让德	Legendre
萨开里	Saccheri
萨拉姆	Salam
斯特洛伊克	Struik
鲍耶，亚诺什	Janos (John) Bolyai
鲍耶，伏尔夫刚	Wolfgang Farkas Bolyai
普恩加莱（即庞加莱）	Poincaré
普雷菲尔	Playfair
普罗克鲁	Proclus
舒尔	Schur
温伯格	Weinberg
奥尔伯斯	Olbers
奥斯特洛格拉德斯基	Остроградский
雅格龙	Яглом
黎曼	Riemann